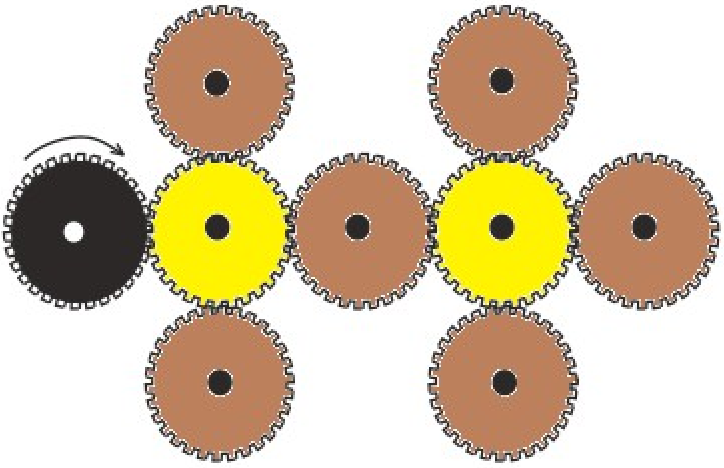
Exercice 1 Les engrenages.

Deux roues qui se touchent tournent dans le sens inverse l'une de l'autre.
Par conséquent les roues jaunes tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et les roues marrons tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.



Par conséquent il y a 6 roues qui tournent dans le même sens que la roue noire.

La réponse est donc **6 roues**.

Exercice 2 Un partage équitable.

Il y a 4×6=24 carreaux au total. Si on partage en deux cela fait 24÷2=12 carreaux pour chaque partie.

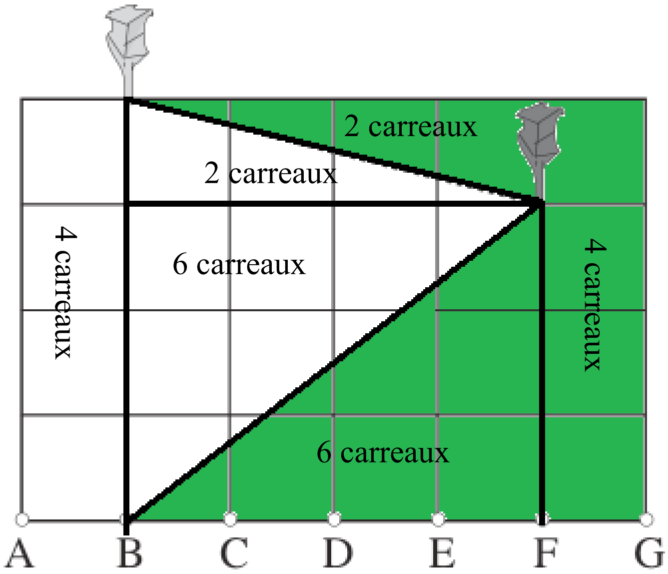
Le grillage déjà posé partage un rectangle de 4 carreaux en deux. Il y a donc l'équivalent de 2 carreaux de part et d'autre.

Si le second grillage va jusqu'à F, il y a donc 2+4=6 carreaux à droite. Il en manque donc 6.

Si le second grillage va à un autre point on partage un autre rectangle (dont l'un des côtés fait 3) en deux parties.

Pour obtenir 6 il faut faire 3×4=12 et 12÷2=6.

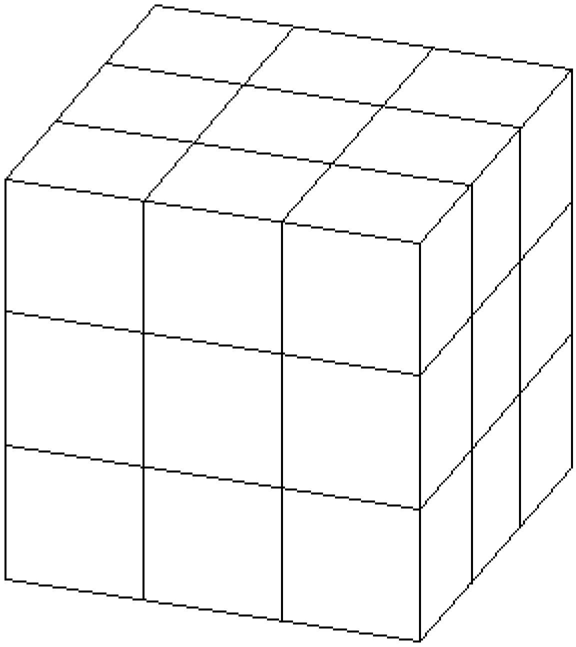
L'autre côté du rectangle fait donc 4 et on arrive au point B.



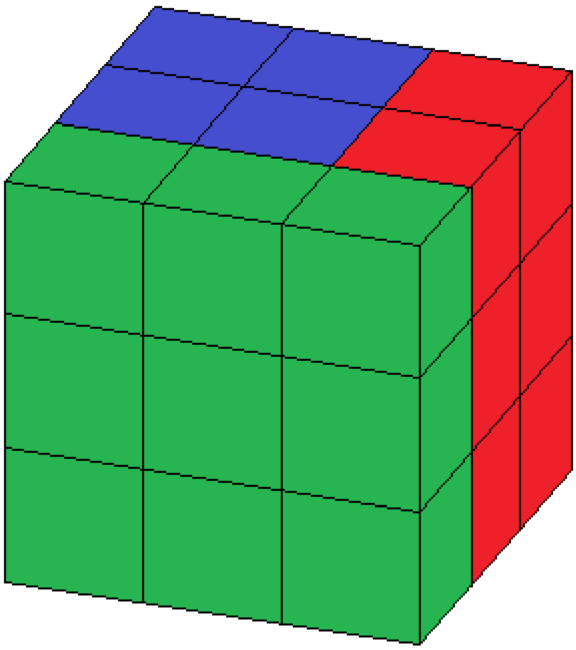
Il faut relier l'arbre gris foncé **au point B**.

Exercice 3 Les cubes.

On peut voir au maximum 3 faces du grand cube.
Chaque face contient 3×3=9 cubes.



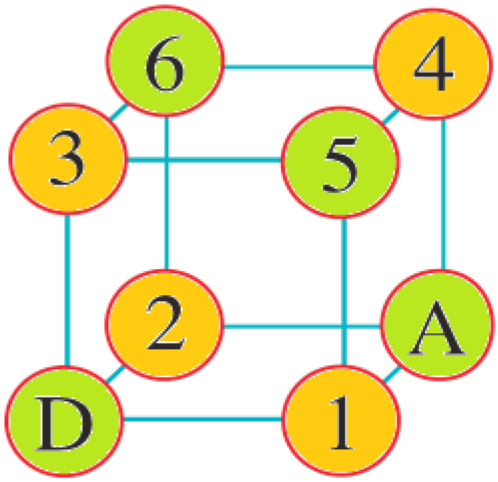
On peut voir 9 cubes (en vert sur le dessin ci-dessous) sur la face de devant ;
6 cubes en plus (en rouge) sur la face de droite ;
et 4 cubes en plus (en bleu) sur la face du dessus.



9+6+4=19.

On peut voir **19 petits cubes**.

Exercice 4 L'araignée.



En allant de D à A, on ne peut pas passer par tous les sommets.

En effet il faut alterner les sommets verts et les sommets oranges.

En revanche on peut passer par 5 sommets (3 oranges et 2 verts).

Au maximum on peut ne pas passer par le 1.

Il suffit de faire le trajet D-3-5-4-6-2-A par exemple.

3+4+5+6+2=20.

L'araignée peut manger au maximum **20 insectes**.

Exercice 5 Carré latin.

1				5
	3		1	
4				
	1		4	
3		2		1

On commence par placer le dernier 1.

1				5
	3		1	
4		1		
	1		4	
3		2		1

Ensuite on place tous les 4.

1		4		5
	3		1	4
4		1		
	1		4	
3	4	2		1

Après on place deux 5.

1		4		5
	3		1	4
4	5	1		
	1		4	
3	4	2	5	1

On place alors tous les 2.

1	2	4		5
2	3		1	4
4	5	1	2	
	1		4	2
3	4	2	5	1

Puis tous les 3.

1	2	4	3	5
2	3		1	4
4	5	1	2	3
	1	3	4	2
3	4	2	5	1

Enfin on finit par les derniers 5.

1	2	4	3	5
2	3	5	1	4
4	5	1	2	3
5	1	3	4	2
3	4	2	5	1

La solution est donc :

1	2	4	3	5
2	3	5	1	4
4	5	1	2	3
5	1	3	4	2
3	4	2	5	1

Exercice 6 Le multiple de l'année.

Si le nombre finit par 4 alors le quotient de ce nombre par 2021 finit aussi par 4 car $4\times1=4$.
Si le nombre finit par 7 alors le quotient de ce nombre par 2021 finit aussi par 7 car $7\times1=7$.

Si le nombre commence par 4 alors le quotient de ce nombre par 2021 commence par 2 car $2\times2021=4042$.
Si le nombre commence par 7 alors le quotient de ce nombre par 2021 commence par 3 car $3\times2021=6063$.

Ce quotient est donc 27, 34 ou 37.

$$\begin{array}{r} 2021 \\ \times\quad 27 \\ \hline 14147 \\ 4042 \\ \hline 54567 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2021 \\ \times\quad 34 \\ \hline 8084 \\ 6063 \\ \hline 68714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2021 \\ \times\quad 37 \\ \hline 14147 \\ 6063 \\ \hline 74777 \end{array}$$

Le dernier nombre est le bon.

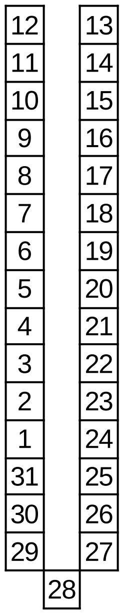
Le multiple est donc **74 777**.

Exercice 7 Le télésiège.

On appelle N le nombre de sièges.
Comme 8<17, les numéros vont dans l’ordre croissant de 17 à 28 d’un côté, puis vont de 28 à N et de 1 à 8 de l’autre côté.
28-17=11. Il y a donc 11 sièges de 17 à 27.
De 1 à 8 il y a 8 sièges. 11-8=3. Il y a donc 3 sièges de 29 à N.
Ces trois sièges sont donc 29, 30 et 31.

Il y a donc au total **31 sièges**.

Voici le détail des sièges de haut en bas :



Exercice 8 Les chiffres de l'année.

Avec 2 zéros, on peut écrire les nombres 1002, 1020, 1200, 2001, 2010.
Avec 2 un, on peut écrire les nombres 1012, 1021, 1102, 1120, 1201, 1210, 2011.
Avec 2 deux, on peut écrire les nombres 1022, 1202, 1220, 2012, 2021.

Au total cela fait **17 millésimes**.

Exercice 9 Une suite incertaine.

On peut avoir 4 cartes dont les valeurs se suivent mais pas 5.
On peut prendre par exemple tous les 2, tous les 3, tous les 4, tous les 5, aucun 6, tous les 7, tous les 8, tous les 9, tous les 10, aucun valet, toutes les dames, tous les rois et tous les as.
Au total cela fait 52-4-4=44 car on enlève les 4 six et les 4 valets.

Au maximum, on peut tirer **44 cartes**.

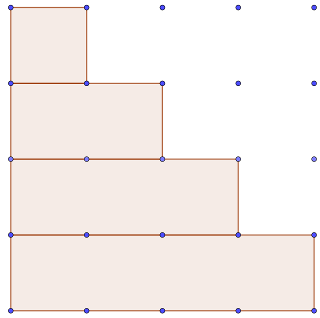
Exercice 10 Les chevaux d'Aristide.

Le périmètre d'un rectangle est donné par la formule 2×(Longueur+largeur).
S'il vaut 30 alors Longueur+largeur=15.
15=13+2=12+3=11+4=10+5=9+6=8+7.
On peut donc faire 6 enclos différents.

Aristide possède **6 chevaux**.

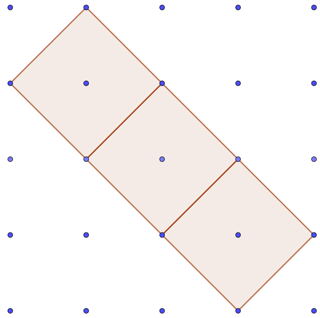
Exercice 11 Les rectangles.

Pour les carrés de côté 1, nous en avons 4×4=16.
Pour les rectangles de côtés 1 et 2, nous en avons 3×4×2=24.
Pour les rectangles de côtés 1 et 3, nous en avons 2×4×2=16.
Pour les rectangles de côtés 1 et 4, nous en avons 1×4×2=8.
Pour les carrés de côtés 2, nous en avons 3×3=9.
Pour les rectangles de côtés 2 et 3, nous en avons 2×3×2=12.
Pour les rectangles de côtés 2 et 4, nous en avons 1×3×2=6.
Pour les carrés de côtés 3, nous en avons 2×2=4.
Pour les rectangles de côtés 3 et 4, nous en avons 1×2×2=4.
Pour les carrés de côtés 4, nous en avons 1.

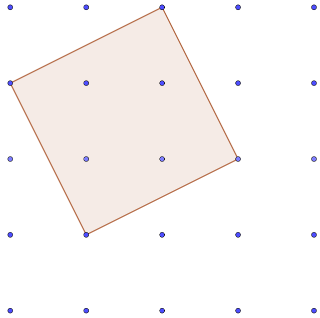


Étudions maintenant ceux qui ne sont pas horizontaux et verticaux.

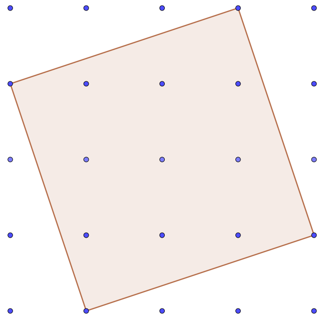
Pour les carrés de côtés 1, nous en avons 3×3=9.
Pour les rectangles de côtés 1 et 2, nous en avons 2×2×2=8.
Pour les rectangles de côtés 1 et 3, nous en avons 2.
Pour les carrés de côtés 2, nous en avons 1.



Pour ces carrés, nous en avons 2×2×2=8.



Pour ces carrés, nous en avons 2.



16+24+16+8+9+12+6+4+4+1+9+8+2+1+8+2=130

Donc il y a **130 rectangles**.

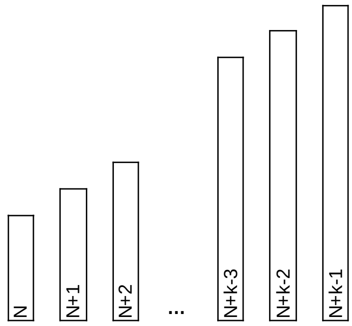
Exercice 12 Les fractions.

Décomposons 2021 en produit de facteurs premiers : on trouve $2021=43\times47$.
On peut donc simplifier nos fractions si le numérateur est un multiple de 43 ou de 47.
Les multiples de 43 inférieurs à 2021 sont 1×43 ; 2×43 ; 3×43 ;… ; 45×43 ; 46×43 .
Il y en a donc 46.
Les multiples de 47 inférieurs à 2021 sont 1×47 ; 2×47 ; 3×47 ;… ; 41×47 ; 42×47 .
Il y en a donc 42.
$46+42=88$.

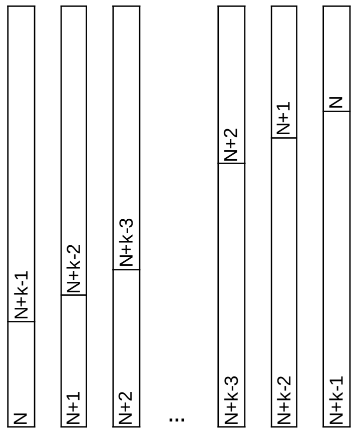
Il y a **88 fractions simplifiables**.

Exercice 13 Les pièces de Picsou.

Effectivement s'il n'avait qu'une pile elle serait composée de 2021 pièces.
S'il n'avait que deux piles elles seraient composée de 1010 et de 1011 pièces.
Si on appelle k le nombre de piles et N le nombre de pièces de la pile la plus basse.



Doublons les piles dans l'ordre inverse et superposons-les aux premières piles.



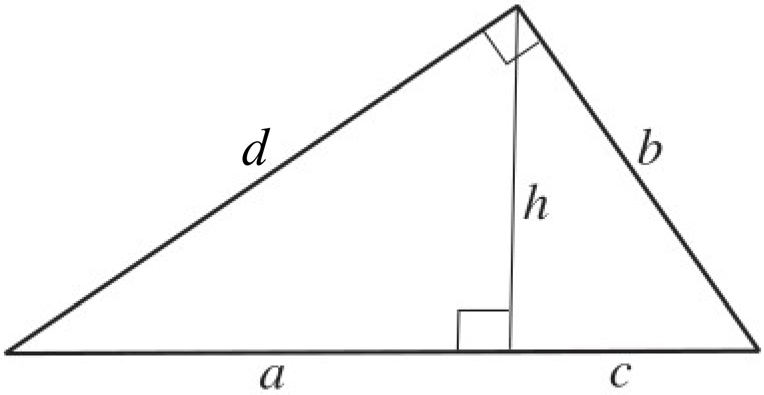
On obtient un rectangle de largeur k et de hauteur 2N+k-1 (plus grand que k car N vaut au moins 1) contenant 2021×2=4042 pièces.
Or 4042=2×43×47=43×94=47×86.
Donc k=43 ou k=47.

Si k=43 alors 2N+42=94 donc 2N=52 et N=26 et la plus haute pile fait 26+42=68 pièces.

Si k=47 alors 2N+46=86 donc 2N=40 et N=20 et la plus haute pile fait 20+46=66 pièces.

Il y a donc **2 solutions** : la pile la plus haute contient **66 ou 68 pièces**.

Exercice 14 Le pré du Père Drau.



Si $a=10$ alors $b+c=10$.

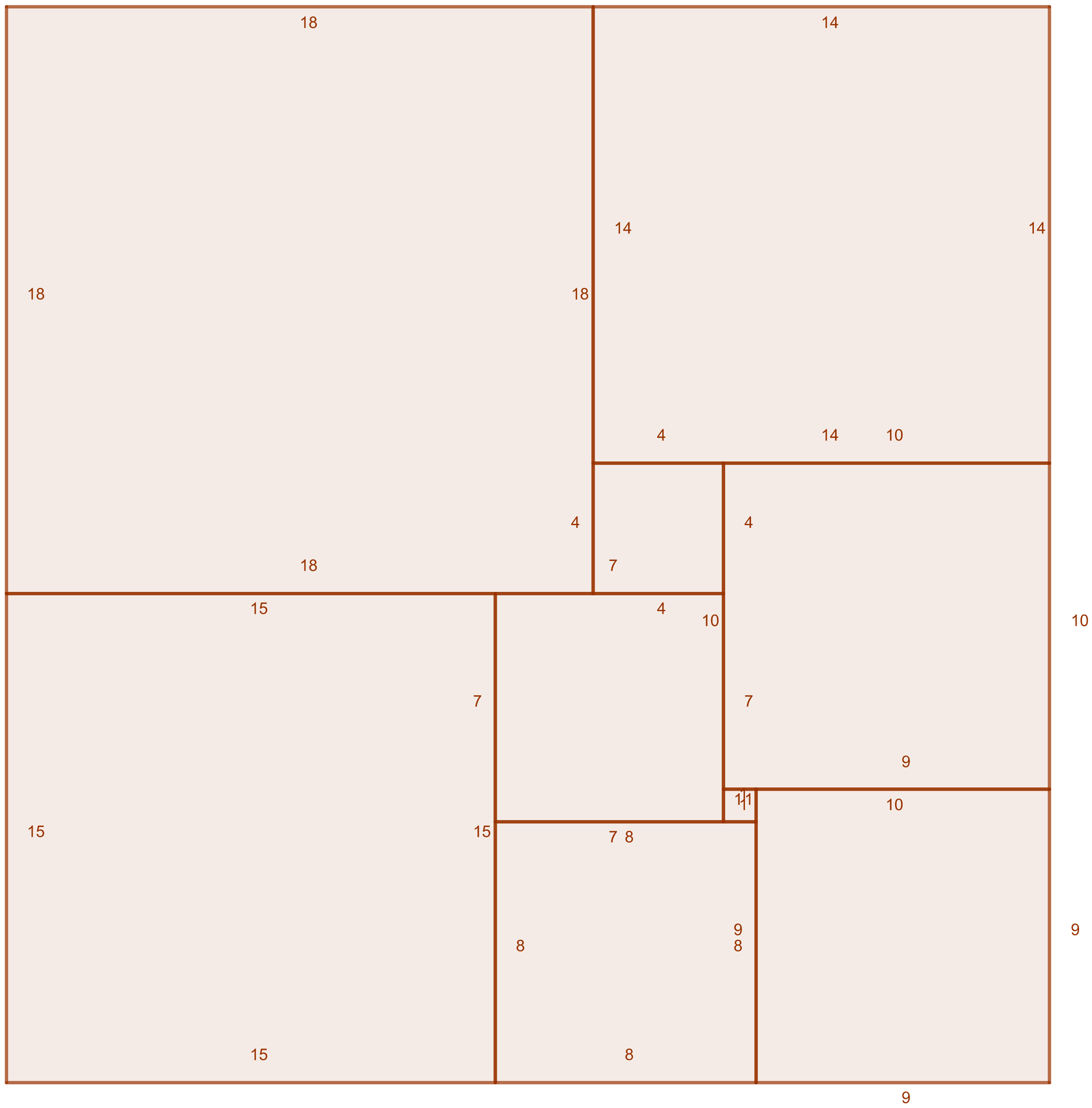
Si on applique le théorème de Pythagore dans le triangle de droite, on trouve :
$h^2=b^2-c^2=(b+c)(b-c)=10(b-c)$.

Si on applique le théorème de Pythagore dans le triangle de gauche, on trouve :
$d^2=10^2+h^2=100+10(b-c)$.

Si on applique le théorème de Pythagore dans le grand triangle, on trouve :
$(10+c)^2 = b^2+d^2$.
$100+c^2+20c = b^2+100 +10(b-c)$.
$20c = b^2-c^2 +10(b-c)$.
$20c = h^2 +10 (b-c)$.
$20c = 10(b-c) +10(b-c)$.
$20c = 20(b-c)$.
$c=b-c$.
$2c=b$.
Or $10=b+c=2c+c=3c$.
Donc $c=\frac{10}{3}\approx 3,33$ m.
La longueur c mesure environ **333 cm**.

Exercice 15 Un rectangle à reconstituer.

$18^2+15^2+14^2+10^2+9^2+8^2+7^2+4^2+1^2=1056=2^5\times3\times11=32\times33$.
18+15=33. et 18+14=32 ce qui permet de coller ces trois carrés de côtés 18;15;14.
Ensuite 18-14=4 et 4+10=14 ce qui permet de coller ces deux carrés de côtés 4 et 10.
Après 15=8+7 ce qui permet de coller ces deux carrés de côtés 8 et 7.
Enfin 10=1+9 ; 8=1+7 et 9=1+8 ce qui permet de coller ces deux carrés de côtés 1 et 9.
On obtient la figure suivante :



Le carré de côté 10 touche bien 5 carrés.
Ce sont les carrés de côtés **1;4;7;9;14**.

Exercice 16 La somme de l'année.

$\frac{47}{43}=1+\frac{4}{43}$. Donc $\frac{n\times 47}{43}=n+\frac{4\times n}{43}$.

$\frac{4n}{43}<1$. $4n<43$. $n<10{,}75$. La partie entière de n×47/43 vaut n.

$\frac{4n}{43}<2$. $4n<86$. $n<21{,}5$. La partie entière de n×47/43 vaut n+1.

$\frac{4n}{43}<3$. $4n<129$. $n<32{,}25$. La partie entière de n×47/43 vaut n+2.

$\frac{4n}{43}<4$. $n<43$. La partie entière de n×47/43 vaut n+3.

Et pour n=43, la partie entière de n×47/43 vaut n+4.

On doit donc faire les calculs suivants :
la somme de 1 à 10.
la somme de (11+1) à (21+1) soit la somme de 12 à 22.
la somme de (22+2) à (32+2) soit la somme de 24 à 34.
la somme de (33+3) à (42+3) soit la somme de 36 à 45.
et (43+4)=47.

On fait donc la somme des nombres de 1 à 47 à laquelle on enlève 11;23;35 et 46.
1+2+3+...+47=47×48÷2=47×24=1128.
11+23+35+46=115.
1128-115=1013.

La somme de l'année vaut **1013**.

Exercice 17 Cinq points et des plans.

Trois points définissent un plan. Pour choisir 3 points parmi 5 on a $\frac{5\times4}{2}=10$ plans différents.

Si on choisit 2 plans parmi ces 10 on a le choix entre deux plans qui possèdent 1 seul point en commun et deux plans qui possèdent deux points en commun.

Dans le premier cas, on choisit 1 point parmi 5 puis 2 points parmi les 4 restants pour déterminer le premier plan, le deuxième plan est déterminé par les deux points restants et le premier point choisi mais on peut intervertir les deux plans (on divise par 2).

On a donc $5\times\frac{4\times3}{2\times2}=5\times3=15$ droites différentes au maximum.

Dans le deuxième cas on choisit 2 points parmi 5. Quel que soient le 3^{e} point choisi pour le premier plan et le 4^{e} point choisi pour le deuxième plan, on obtient la droite passant par ces deux premiers points.

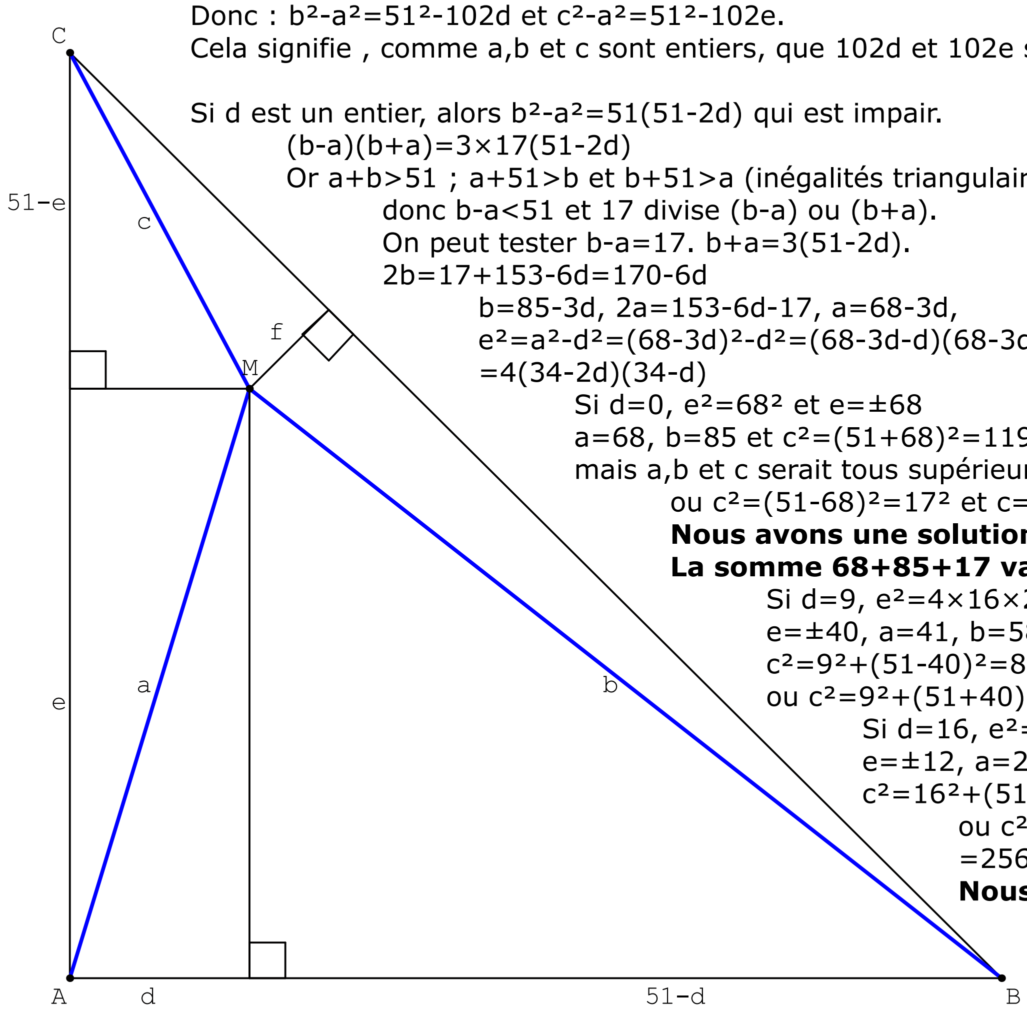
On a donc $\frac{5\times4}{2}=10$ droites en plus

15+10=25.

Au maximum on aura **25 droites**.

Exercice 18 Les cèdres de l'arboretum.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $a^2=d^2+e^2$. $b^2=(51-d)^2+e^2$. $c^2=d^2+(51-e)^2$.



Donc : $b^2-a^2=51^2-102d$ et $c^2-a^2=51^2-102e$.

Cela signifie , comme a,b et c sont entiers, que 102d et 102e sont entiers relatifs.

Si d est un entier, alors $b^2-a^2=51(51-2d)$ qui est impair.

$(b-a)(b+a)=3\times17(51-2d)$

Or $a+b>51$; $a+51>b$ et $b+51>a$ (inégalités triangulaire)

donc $b-a<51$ et 17 divise $(b-a)$ ou $(b+a)$.

On peut tester $b-a=17$. $b+a=3(51-2d)$.

$2b=17+153-6d=170-6d$

$b=85-3d$, $2a=153-6d-17$, $a=68-3d$,

$e^2=a^2-d^2=(68-3d)^2-d^2=(68-3d-d)(68-3d+d)=(68-4d)(68-2d)$

$=4(34-2d)(34-d)$

Si $d=0$, $e^2=68^2$ et $e=\pm68$

$a=68$, $b=85$ et $c^2=(51+68)^2=119^2$ $c=119$

mais a,b et c serait tous supérieur à 30 ;

ou $c^2=(51-68)^2=17^2$ et $c=17$.

Nous avons une solution a=68, b=85 et c=17.

La somme 68+85+17 vaut 170.

Si $d=9$, $e^2=4\times16\times25$ qui est un carré.

$e=\pm40$, $a=41$, $b=58$,

$c^2=9^2+(51-40)^2=81+121=202$

ou $c^2=9^2+(51+40)^2=81+8281=8362$.

Si $d=16$, $e^2=4\times2\times18$ qui est un carré.

$e=\pm12$, $a=20$, $b=37$,

$c^2=16^2+(51-12)^2=256+1521=1777$

ou $c^2=16^2+(51+12)^2$

$=256+3969=4225=65^2$

Nous avons une solution

a=20, b=37 et c=65.

La somme 20+37+65

vaut 122.

$b-a\neq34$ car $51(51-2d)$ est impair.

Or $a+51>b$ donc $b-a<51$. Nous avons donc testé tous les multiples de 17 possibles pour b-a.

Testons pour a+b qui est supérieur à 51.

Si $a+b=85$ alors $(b-a)=3(51-2d)/5$. Si $d=-12$, $b-a=45$, $b=65$, $a=20$ et $e^2=20^2-12^2=256=16^2$

donc $e=\pm16$. $c^2=12^2+(51-16)^2=1369=37^2$ (solution déjà trouvée).

Si $a+b=119$ alors $(b-a)=3(51-2d)/7$. Aucune solution.

Si $a+b=153$ alors $(b-a)=(51-2d)/3$. Si $d=0$, $b-a=17$, $b=85$, $a=68$ et $e^2=68^2-0^2=68^2$ donc $e=\pm68$.

$c^2=0^2+(51-68)^2=17^2$, $c=17$ (solution déjà trouvée)

Si $a+b=187$ alors $(b-a)=3(51-2d)/11$. Toutes les valeurs de a,b,c possibles sont supérieures à 30.

Cherchons des solutions où d et e ne sont pas entières. Or $102^2=90^2+48^2$.

Cherchons une solution telle que :

$102d=\pm48a$

et $102e=\pm90a$.

On a alors $(102a)^2=(48a)^2+(90a)^2$

$b^2=a^2+51^2\pm48a=(a\pm24)^2-24^2+51^2=(a\pm24)^2-576+2601=(a\pm24)^2+2025=(a\pm24)^2+45^2$.

$c^2=a^2+51^2\pm90a=(a\pm45)^2-45^2+51^2=(a\pm45)^2-2025+2601=(a\pm45)^2+576=(a\pm45)^2+24^2$

Cherchons tous les triplets pythagoriciens impliquant 24,

on trouve (7;24;25), (10;24;26), (18;24;30), (24;32;40), (24;45;51), (24;70;74), (24;143;145) et (0;24;24).

Premier cas : $a-45=7$ et $a=52$, $c=25$ et $b^2=28^2+45^2=784+2025=2809=53^2$ donc $b=53$.

Nous avons une solution a=52, b=53 et c=25. La somme 52+53+25 vaut 130.

Ou $a-45=7$ et $a=52$, $c=25$ et $b^2=76^2+45^2=5776+2025=7801$ mais b n'est pas entier.

Ou $a-45=-7$ et $a=38$, $c=25$ et $b^2=14^2+45^2=196+2025=2221$ mais b n'est pas entier.

Ou $a-45=-7$ et $a=38$, $c=25$ et $b^2=62^2+45^2=3844+2025=5869$ mais b n'est pas entier.

Pour les autres cas : b n'est pas entier dans tous les cas.

Il y a donc **3 solutions**, la somme fait **122, 130 ou 170**.