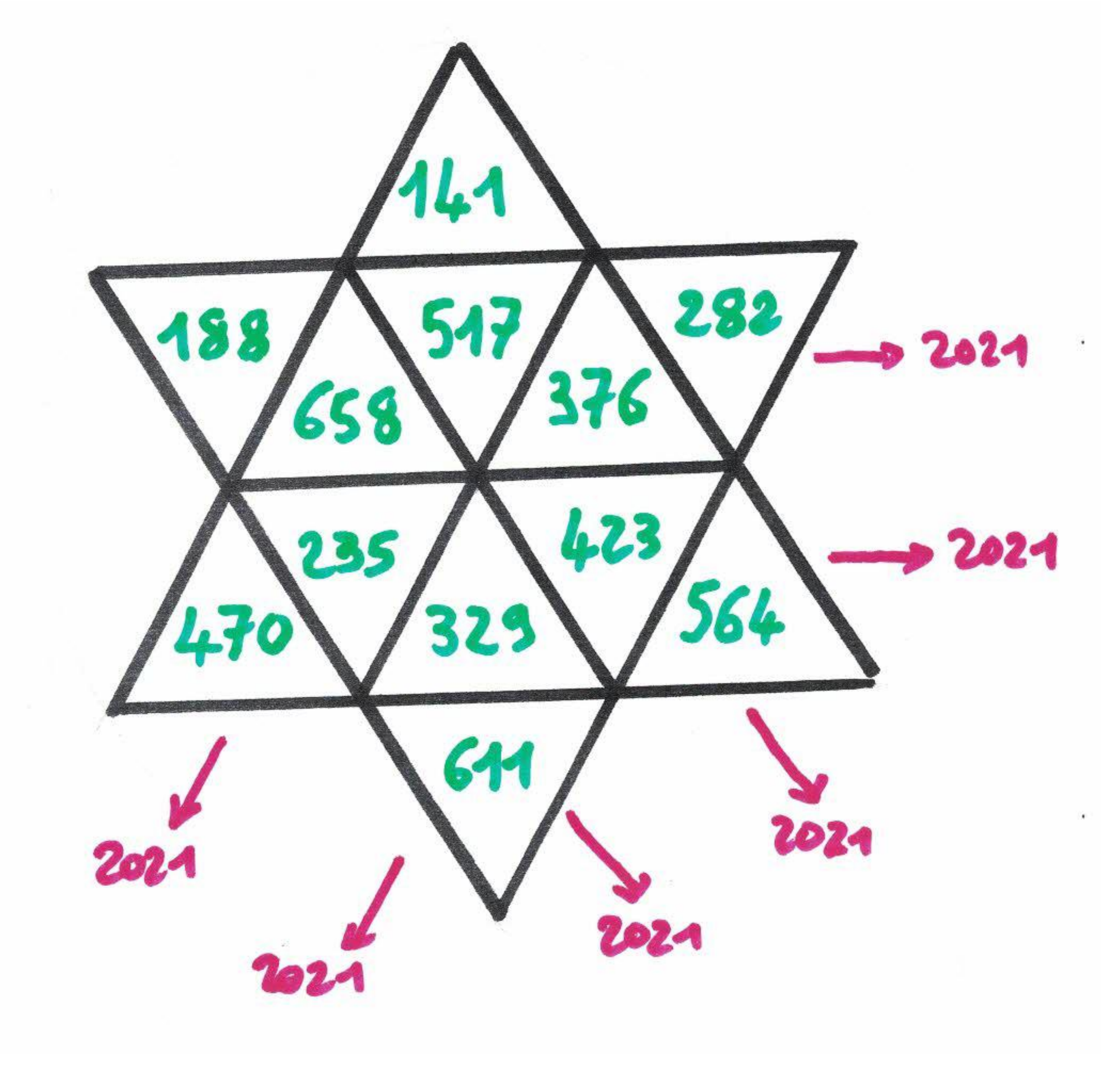
Solutions de la série 3 du jeu du matheux re-confiné

(Dominique SOUDER)

Exercice 1 : L'étoile de Noël indique la voie vers 2021…

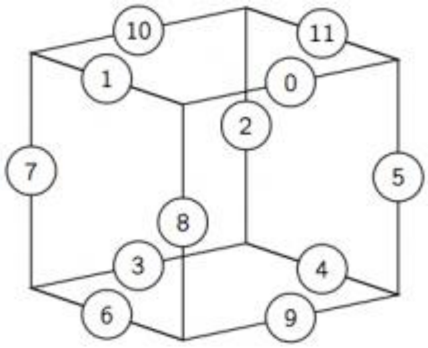
On remarque que 2021 = 43x47. Si l'on avait une étoile de somme 43, il suffirait de multiplier par 47 chacun des 12 nombres pour avoir une étoile de somme magique 2021 constituée de 12 nombres en progression arithmétique de raison 47.

On peut obtenir facilement l'étoile de somme 43 à partir de celle, connue, de somme 33 : il suffit d'ajouter 2 à chaque nombre de cette dernière, et ainsi tout alignement de 5 nombres permet une augmentation de 5x2 = 10, d'où 33+10=43. Les nombres vont alors de 3 à 14. Après multiplication par 47 on obtient la solution :



Exercice 2 :Le parcours confiné sur le cube

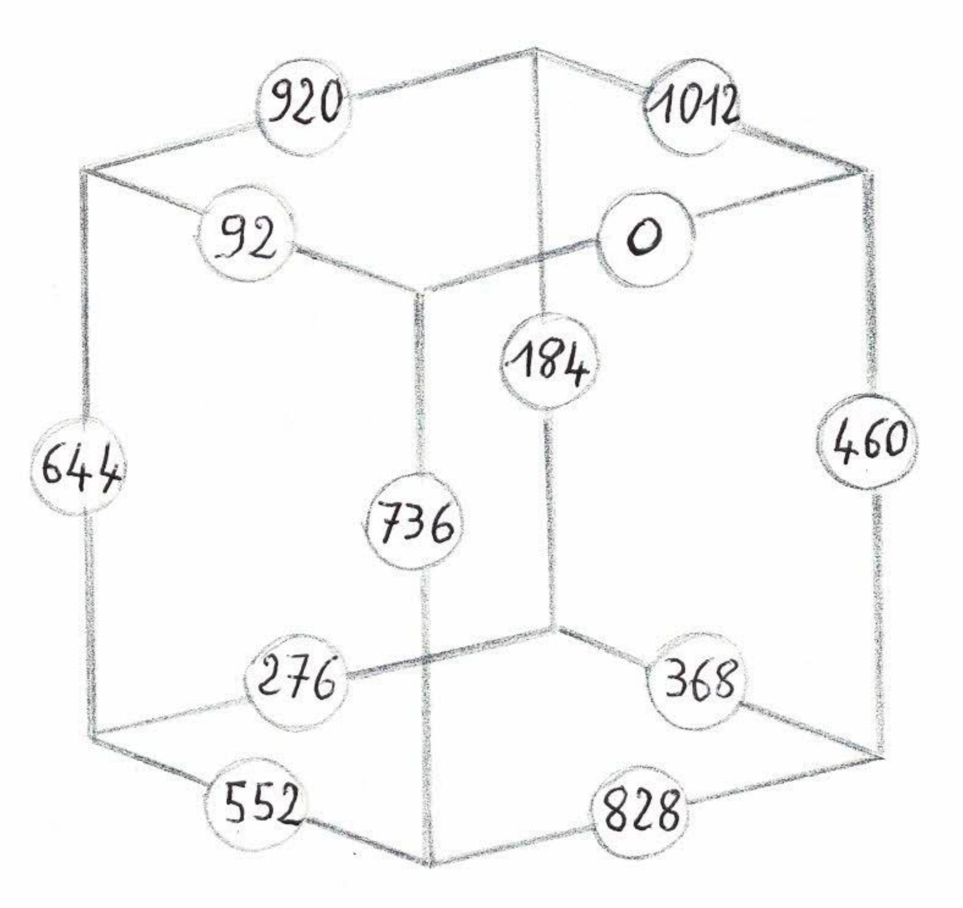
Cube modèle complété :



La constante magique est un total de 22 pour chaque face du cube modèle.

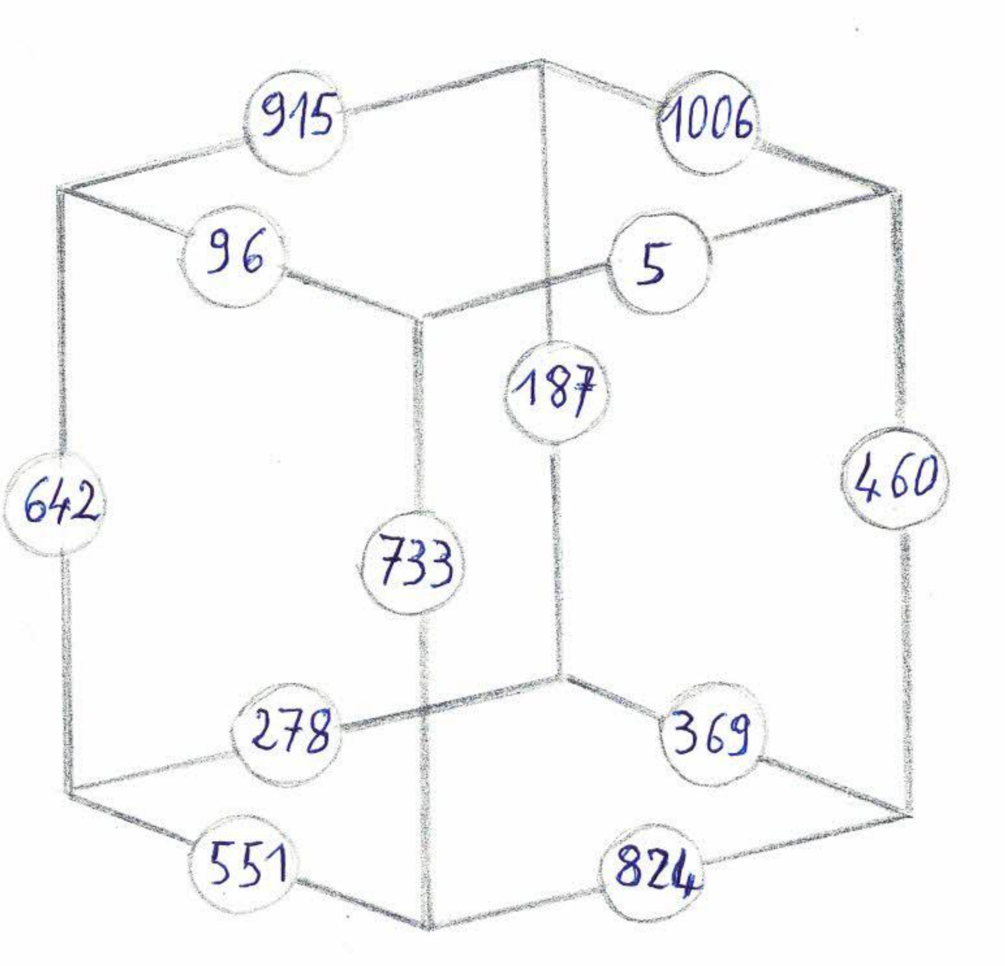
Pour le cube cherché, soit a le plus petit nombre et r la raison ; on doit avoir sur chaque face 4a +22r = le millésime.
Comme 4a+22r est un nombre pair, il ne peut valoir 2021 ; ni d'ailleurs 2023.

Si on remarque que 2024 = 22x92, il est facile de construire **le cube de 2024** à partir des nombres 0 à 11 qu'il suffit de multiplier chacun par 92. Les nombres vont alors de 0 à 1012 en progression arithmétique de raison 92.



Et pour 2022 ?
On peut prendre r = 91 car 2002 = 22x91, et 2022 = 20+2002 = 4x5 +22x91.
Le nombre de départ est 5, et la progression est de raison 91.

On peut donc construire **un cube pour 2022**, où les nombres vont alors de 91 en 91 de 5 jusqu'à 5+11x91 = 1006.



Exercice 3 : La magie de Noël

1°) Les dés sont fabriqués avec un truc permettant la somme rapide des nombres sur les trois cubes. Observons les dés…

Pour chaque dé

- le chiffre ***d*** des dizaines est le même sur les six faces de ce dé ;
- le chiffre ***c*** des centaines est le même sur les six faces de ce dé.

Moins évident ensuite :

Il y a sur chaque dé six chiffres des milliers différents et ces six chiffres différents sont identiques à ceux des unités ; de plus, milliers (m) et unités (u) sont associés par paires ayant la même somme :

- sur le premier dé le total (m+u) est toujours 11
- sur le deuxième dé le total (m+u) est toujours 8,
- sur le troisième dé le total (m+u) est toujours 10.

Conséquence : quand on additionne les trois nombres du lancer, la somme des trois chiffres des milliers et des trois chiffres des unités (m+u) est égale à 29 (car 11+8+10 = 29).

Autres observations :

- la somme des trois chiffres des dizaines est égale à : 4+7+9 = 20 ;
- la somme des trois chiffres des centaines est égale à : 5+4+2 =11.

Ainsi lorsqu'on effectue la somme des nombres affichés des trois dés, nous obtenons 20 dizaines et 11 centaines. Nous avons calculé mentalement ***S*** unités. Il y a donc (29−S) milliers. Finalement la somme totale est :
$1000\,(29 - S) + 11\times100 + 20\times10+S = 29\,000 - 1000S + 1300 + S$
soit $30\,000 - 1000 - 1000S + 1300 + S = 30\,000 - 1000S + 300 + S$
On obtient finalement :
$1000\,(30-S) + 300 + S = (30 - S) \times 1000 + 3 \times 100 + S$

Il suffit donc, pour obtenir le total à cinq chiffres des trois nombres affichés par les trois dés, de juxtaposer :

- pour les deux chiffres à droite : la somme **S** des unités écrite avec deux chiffres,
- pour le chiffre du milieu (centaines) : le chiffre 3

- pour les deux chiffres de gauche : le complément de **S** à 30.

Par exemple pour un premier lancer : 6545+2476+7293 = 16 314

S’il voyait le résultat le magicien pourrait se contenter de calculer S = 5+6+3 = 14, puis il calculerait : 30 – S = 30 – 14 = 16. Il écrirait le 3 au milieu des deux nombres précédents soit (16) 3 (14), et annoncerait comme total du lancer 16 314.

De même pour un deuxième lancer : 3548+6472+3297 = 13 317.

En voyant les dés on peut calculer 8+2+7 = 17, puis 30 – 17 = 13 et annoncer le total des 3 dés soit 13 317.

2°) Revenons au tour présenté… **Le magicien ne voit pas les dés** et ne connaît pas les deux totaux, alors comment peut-il connaître la différence des deux totaux ?

Les deux totaux ont la forme d’écriture suivante (30−a)3(a) et (30−b)3(b) avec pour a et b deux nombres de deux chiffres.

Le premier vaut $(30-a)\times1000 + 300 + a$, le deuxième vaut $(30-b)\times1000 + 300 + b$.

En admettant que a soit plus grand que b, alors (30−a) est plus petit que (30−b), et le plus grand des deux totaux est le deuxième ; la soustraction donne :

$(30-b-30+a)\times1000 + 300-300 + b-a = 1000 \times (a-b) + (b-a)$

$= (a-b) \times (1000 - 1) = 999 \times (a-b).$

Le résultat de la soustraction est toujours un nombre positif multiple de 999.

Le plus grand résultat de lancer possible est : 8543+7471+8292 = 24 306.

Le plus petit résultat possible de lancer est : 3748+1477+2298 = 7323.

La différence la plus élevée possible est : 24 306 – 7323 = 16 983.

Les différences les plus petites sont 0 et 999.

On peut obtenir 0 quand les deux lancers sont identiques. On peut obtenir 999 avec deux lancers dont les deux premiers dés coïncident et dont les troisièmes dés diffèrent entre eux de 999 comme par exemple 3297 et 2298.

Les résultats multiples de 999 qu'on peut obtenir sont donc : 0, 999, 1998, 2997, 3996, 4995, 5994, 6993, 7992, 8991, 9990, 10 989, 11 988, 12 987, 13 986, 14 985, 15 984, 16 983.

- Quand le résultat s'écrit avec quatre chiffres, on remarque que les chiffres extrêmes ont pour somme 9, et qu'au centre de l'écriture du résultat il y a deux 9. Si le spectateur annonce pour chiffre des unités 3, le magicien calcule 9–3 = 6 et annonce pour résultat 6993.

- Quand le résultat a cinq chiffres, le chiffre du milieu est toujours 9, le chiffre des dizaines est toujours 8, la partie formée des deux chiffres de droite et la partie formée des deux chiffres de gauche ont toujours pour somme 99. Si le spectateur annonce pour chiffre des unités 3, le magicien pense à une fin en 83, calcule 99–83 = 16 et annonce pour résultat 16 983.

- Le cas de deux lancers identiques et donc de somme nulle peut être évité entre le magicien et le spectateur (« on recommence : vous pouvez avoir des résultats différents ! »).

- Dans le cas d'un nombre a trois chiffres le seul résultat possible est 999, le magicien peut même se dispenser de demander le chiffre des unités.

Réponses aux questions de l'exercice :

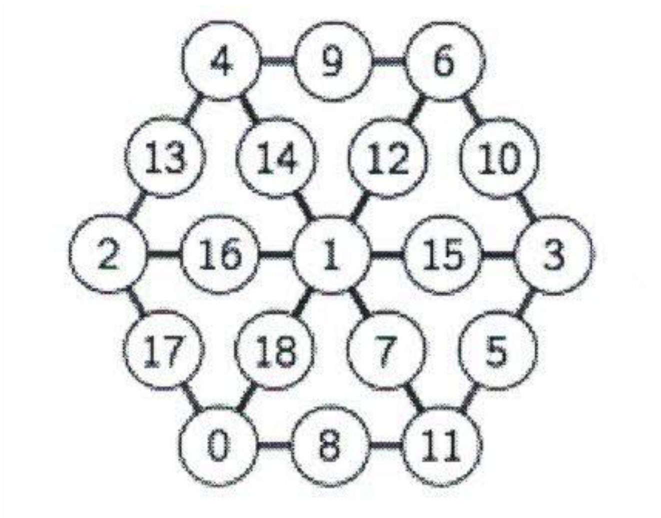
- Si le spectateur donne le chiffre des unités, soit 2, et indique que le résultat s'écrit avec quatre chiffres, alors le magicien dit que le résultat de la soustraction est 7 992.

- Si le spectateur donne le chiffre des unités, soit 7, et indique que le résultat a cinq chiffres, alors le magicien dit que le résultat de la soustraction est 12 987.

- Si le spectateur dit que le résultat est un nombre a trois chiffres le seul résultat possible est 999, le magicien peut même se dispenser de demander le chiffre des unités.

Exercice 4 :Les roues magiques

On observe que les valeurs se succèdent de 79 en 79 à partir du nombre 173.
On enlève 173 à tous les nombres. On obtient une roue formée de 19 multiples de 79, à partir de 0 et jusqu'à 79x18 = 1422.
On divise chaque nombre par 79 et on obtient **la roue modèle** avec les 19 nombres consécutifs de 0 à 18.



Recherche d'une roue de 2021.

A partir de la plus petite valeur numérique D, qui figurera sur une roue souhaitée (à la place actuelle du 0), on trouvera les nombres suivants par progression arithmétique de raison r (et r sera la valeur écrite au centre de l'hexagone).

Le total des 3 nombres de chaque rayon et chaque côté est invariablement : 3D + 19r, et vaudra 2021. Comme 2021/19 vaut un peu plus de 105, on envisage les valeurs de r < 105, mais il faut que (2021-19r) soit divisible par 3 pour obtenir un nombre D entier.

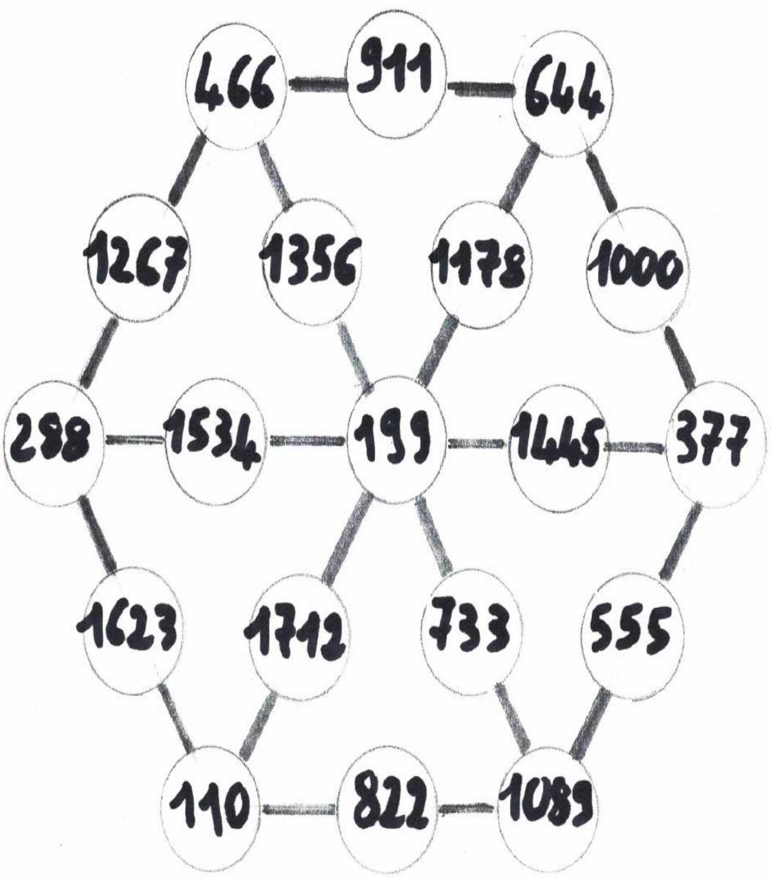
La première valeur intéressante est r = 2, d'où D = 661.

Ensuite r = 5 d'où D = 642. On observe ensuite que les valeurs possibles de r se succèdent de 3 en 3 et que les valeurs de D diminuent de 21 en 21. La valeur maximum de r est 104 avec D = 15.

Comme 104 = 2+3x34 le nombre de solutions pour r est le nombre d'entiers de 0 à 34 soit 35 solutions.

Le professeur doit avoir **au maximum 35 élèves** pour que chacun d'eux réalise une carte personnelle différente de celle des autres.

Ci-dessous le **dessin d'une roue de 2021** :
C'est celle **obtenue avec pour nombre de départ 110, et pour raison 89** (vérifiant 3x110+19x89=2021)



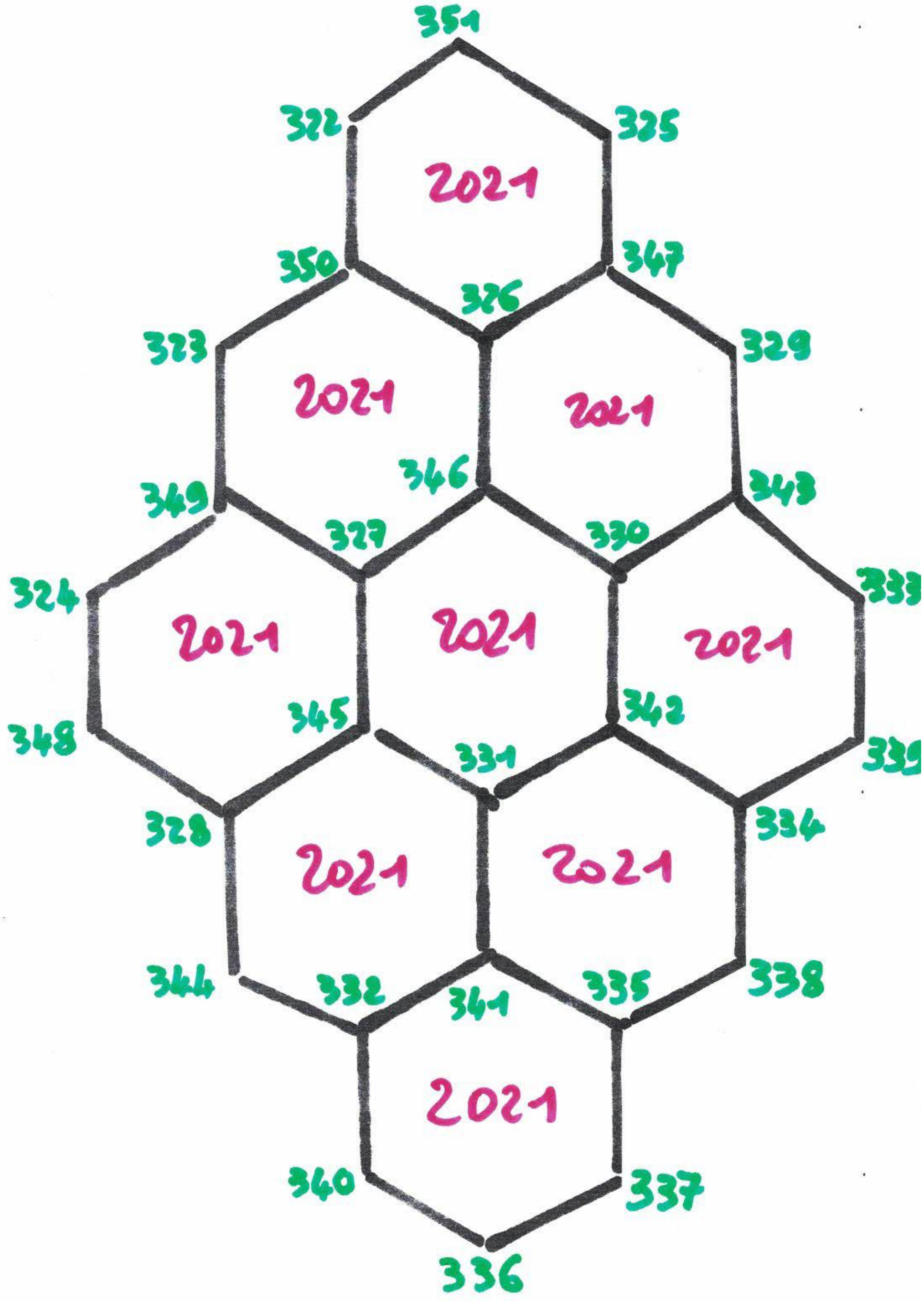
Exercice 5 : Fêtons 2021, à l'ancienne

Pour passer de 95 à 2021 combien faut-il ajouter ?
Réponse : 2021-95 = 1926, et c'est un multiple de 6 car 1926 = 6x321.

Monsieur Tout-le-Monde va donc ajouter 321 à chacun des nombres de 1 à 30 qui vont donc être remplacés par les nombres de 322 à 351 sur le réseau de base 95. Il obtient ainsi un réseau de somme magique 2021 constitué de 30 nombres consécutifs.

(Carte de vœux ci-dessous)

Les habitants de l'hexagone vous souhaitent une année 2021 magique ! Que les bienfaits des mathématiques ruissellent sur toute la ruche, avec la même régularité qui fait que chaque ensemble de six nombres d'une même alvéole hexagonale totalise 2021… De plus voyez que les 30 nombres utilisés sont consécutifs.Mathémagiquement vôtre...



Exercice 6 :« Le bouquet final »

Chaque cercle contient le nombre central c ; soit r la raison. On peut observer que la somme des 5 nombres sur chaque cercle vaut 5c + 26r, et cela doit être égal à 2021. Comme 2021/26 donne un peu plus de 336, on envisage des raisons inférieures à 336.
Si r = 0 il est impossible de trouver un entier c tel que 5c = 2021.
Si r = 1, on trouve 5c = 1995, puis c = 399.
Si r vaut 2, 3, 4, 5 le nombre (5c) ne finit par 5 donc il n'y a pas de solution pour c.
Si r = 6, on trouve 5c = 1865 puis c = 373.
Et ainsi de suite…

Les valeurs possibles de r démarrent de r = 1 et vont de 5 en 5.
Les valeurs de c diminuent de 26 en 26, à partir de 399 et jusqu'à 9 qu'on obtient assez vite.
Pour c = 9 on a r = 76, soit 1+5x15.
Il y a **16 couples solutions** de (1 ; 399) jusqu'à (76 ; 9).

Voici par exemple la solution obtenue pour r = 21 et c = 295 :