SOLUTIONS de la Série 5

Jeu du matheux confiné : 3^e vague

Dominique Souder

Exercice 1 : Un morceau de chocolat-maths à croquer

Dans BOA et COA soient respectivement H et H' les pieds des perpendiculaires abaissées de B ou C vers (OA). Comparons les aires de OAB et OAC.
Aire OAB = OA x BH/2 et aire OAC = OA x CH'/2.
D'où (aire OAB) / (aire OAC) = BH/ CH'.

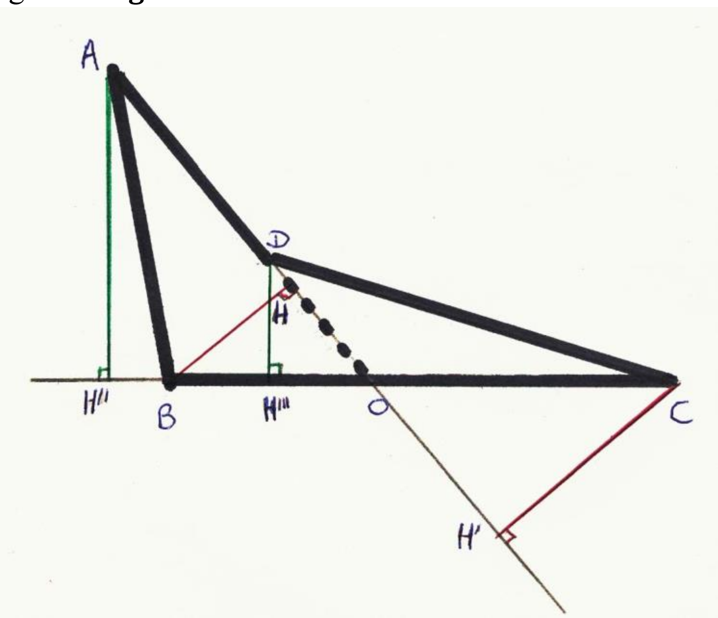
Les droites (CH') et (BH) sont parallèles entre elles car toutes les deux perpendiculaires à (OA). En comparant les triangles OCH' et OBH, le théorème de Thalès donne OB/OC = BH/CH'.
On obtient donc (aire OAB)/(aire OAC) = OB/OC.

De même soient AH'' et DH''' des hauteurs perpendiculaires à (BC) dans OAC et OCD. On obtient alors : (aire OAC) / (aire OCD) = AH''/ DH'''.

Les droites (AH'') et (DH''') sont parallèles entre elles car toutes les deux perpendiculaires à (BC). En comparant les triangles OAH'' et ODH''', le théorème de Thalès donne AH''/DH''' = OA/OD.
On obtient donc (aire OAC)/(aire OCD) = OA/OD.

Cependant : (aire OAB)/(aire OCD) = [(aire OAB)/(aire OAC)] x [(aire OAC)/(aire OCD)] = (OB/OC) x (OA/OD) = (OA x OB) / (OC x OD).
Comme OB = 4, OC = 6, OD = 3 et DA = 5 on a OA = 3+5 = 8.
On obtient : (aire OAB)/(aire OCD) = (4x8) / (6x3) = 32/18.

Comme l'aire de la pièce de chocolat est égale à : (aire OAB) + (aire OCD) on peut l'imaginer constituée de 32+18 = 50 parts pesant en tout une livre, soit 500 grammes si c'est **une livre française**. Une part pèse donc 10 g.
Le petit morceau pèse 18x10 = 180 g, le gros morceau pèse 32x10 = 320 g.
Ma petite sœur mangera **180 g de chocolat.**



L'allusion à Penrose dans la présentation des 2 premiers tours peut faire penser à **une livre anglaise**, donc cette autre solution est aussi acceptée :

le petit morceau pèse : **env. 163,293** grammes **(soit 0,36 livre « pound » de 453,592 g).**

<u>Exercice 2 : Un petit déjeuner mathématique</u>

On ne connait pas le prix d'un café, ni celui d'un croissant, ni celui d'une barre de chocolat. Cela fait trois inconnues alors que nous ne connaissons que deux valeurs : 16 et 9 euros. Cependant la situation est concrète et il doit y avoir une solution.

Chaque note à payer est un triplet de dépenses (cafés, croissants, barres de chocolat).

Pour Rodrigo c'est (1 ; 3 ; 4), pour Ethan c'est (2 ; 4 ; 5) et pour Maëlyne (1 ; 1 ; 1).

On va exprimer la situation de Maëlyne comme combinaison linéaire des situations de Rodrigo et d'Ethan, avec comme coefficients a et b.

(1 ; 1 ; 1) = a (1 ; 3 ; 4) + b (2 ; 4 ; 5)

Soit un système de trois équations {1 = a+2b ; 1 = 3a+4b ; 1 = 4a+5b} à deux inconnues.

Les deux premières conduisent à {3 = 3a +6b ; 1 = 3a +4b} d'où 2b =2 et b = 1, puis a = - 1.

La troisième équation est vérifiée comme on pouvait s'y attendre dans cette situation concrète, avec les mêmes valeurs car : 4a+5b = -4+5 = 1.

La note de Maëlyne est donc : 1(9) + (-1) (13) = 4 euros.

Chacun des deux garçons doit donc payer pour elle la moitié soit **2 euros**, ce qui n'est pas cher pour obtenir une bonne note au devoir de maths !

<u>Exercice 3 : La 17^{e} en question…</u>

Supposons le nombre n de cartes de la forme d'une puissance de deux soit 2^k, la carte numérotée 1 depuis le dessus va revenir au-dessus du paquet après enlèvement de toutes les cartes de numéro pair, et on est ramené au même problème avec 2^{k-1} cartes. C'est donc la carte numérotée 1 qui est la carte restante quand n est une puissance de deux.

Si n est entre deux puissances de deux, donc si n = 2^k +p avec p compris strictement entre 0 et 2^k on obtient un tas de 2^k cartes après avoir enlevé p cartes, et fait passer p cartes vers le dessous ; ainsi donc la carte maintenant sur le dessus est celle de numéro (2p+1). Ce sera la carte restante : il faut donc que le magicien montre la carte numéro (2p+1) au début du tour.
2p+1 = 17 donc **p = 8**.

- Pour le gros tas, le nombre de cartes présenté est de la forme 2^k +p, mais doit faire plus de 17 et plus de la moitié de 104 (soit 52) donc c'est 64+8 = **72 cartes**.

- Le petit tas a donc 104 – 72 = 32 cartes. Après prélèvement, le nombre de cartes présenté à Mina sera encore de la forme 2^k +p, mais il doit faire plus de 17 et moins de 32. Il y a une solution : 16+8 = 24 cartes. Donc à partir du petit tas de 32 cartes Ludo a dû prélever : 32 – 24 = **8 cartes**.

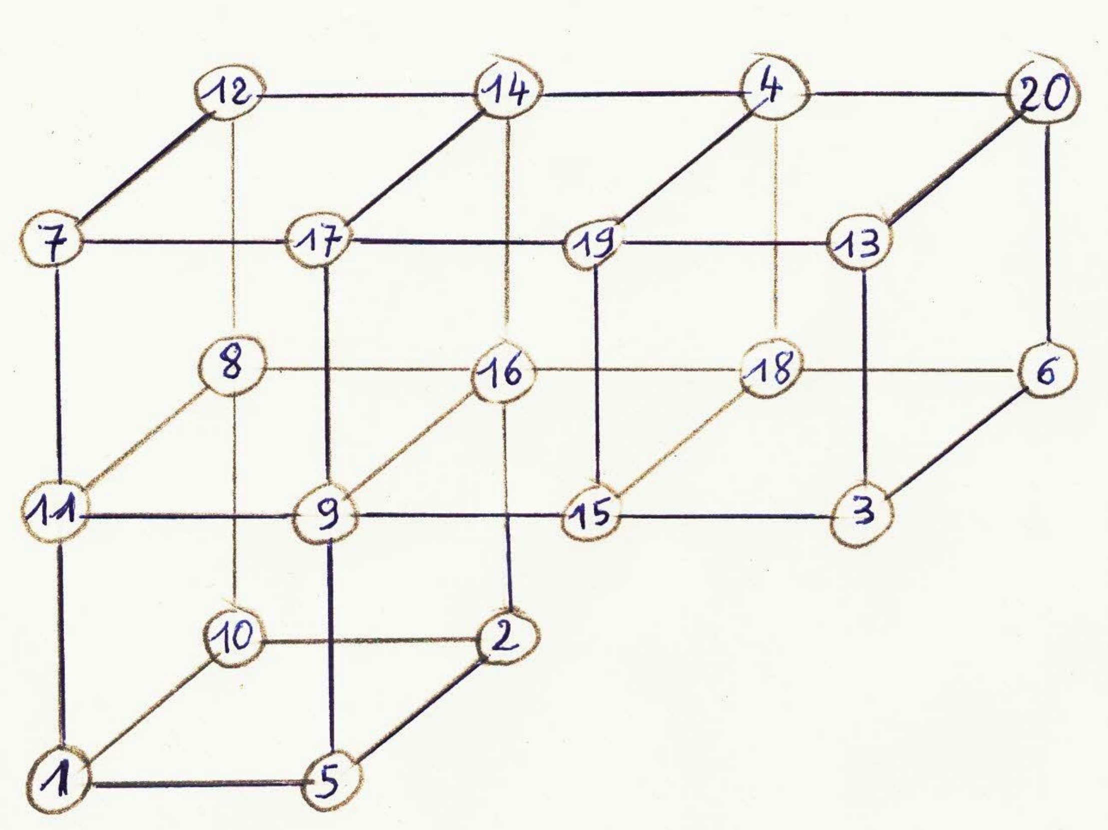
Exercice 4 : de la distanciation sociale, des voisins, et de la famille

La somme des nombres de 1 à 20 est : 20x21/2 = 210.

Si t est le plus petit total d'un des 4 plans en progression arithmétique, et si r est la raison, les autres totaux sont (t+r), (t+2r), (t+3r) et on a pour somme des totaux : 4t + 6r = 210.

Prenons par exemple a = 49 et r = 7 (on vérifie que 4x42 + 6x7 = 168 + 42 = 210).

Voici une solution :



__Dans les compléments__ de F. Zimmer et D. Collignon vous aurez d'autres solutions et des commentaires intéressants sur leur nombre.

Exercice 5 : La bosse des maths ou le bosseur du calcul astucieux ?

- Il faut remarquer que les deux derniers chiffres à droite de la valeur du logarithme décimal sont les deux premiers chiffres à gauche du nombre cherché, entier à cinq chiffres.
- Il faut remarquer que le nombre entier cherché peut se trouver, à partir des deux chiffres de gauche déjà trouvés, en pensant à les multiplier. Premier exemple : à partir

de 4,275633818 on part de 18 qu'on écrit ; ensuite 1x8 = 8 donc on écrit à droite du 18 un 8. Dans 188 les deux derniers chiffres écrits sont maintenant 88 alors on calcule 8x8 = 64 et on écrit 64 à droite d'où 18 864 (on s'arrête quand on a cinq chiffres ce qui correspond à la partie entière cherchée). Cependant quand le dernier produit de deux chiffres donne un résultat à deux chiffres qui occuperaient les 5^e et 6^e positions on n'écrit que le 5^e. Ainsi dans le troisième exemple à partir de 4,913209681 on écrit 81 puis 818, puis 8188 mais le 8x8 = 64 qui suit est réduit au chiffre 6 et le nombre entier à donner est 81 886.

- A partir des deux derniers chiffres à droite de la valeur du log, le système de Domino lui permet d'obtenir les trois suivants à droite, du nombre souhaité de cinq chiffres.

- Dans le deuxième exemple si, pour vérifier, on calculait log 73 212 on trouverait 4, 864582271 et non 4,864582273 ; la calculatrice grâce à la touche (10^x) avec x = 84,64582273 donne le nombre 73 212,0003 de partie entière 73 212. La fin en 73 sur la liste diffère de la fin en 71 : pourquoi ? Pour respecter l'astuce de calcul du magicien d'avoir une fin (ici en 73) correspondant au début à gauche (73) du nombre entier. Il faut vérifier que ce genre de remplacement ne change pas le nombre de cinq chiffres. Comme la fonction logarithme est croissante, on trouve un peu plus, mais sans changer la partie entière.

- Parfois il faut modifier les trois derniers chiffres et pas seulement le dernier ou les deux derniers, ainsi pour le premier exemple qui donne comme résultat 18 864. Le logarithme décimal de celui-ci donne 4,275633788. Pour pouvoir commencer le nombre de cinq chiffres par 18, il faut remplacer 88 en 18 mais on remplace 788 par 818 et non par 718 qui, trop petit, ferait baisser la partie entière. Ainsi log 4,275633818 = 18 864, 0013 de partie entière 18 864.

- Quel est le couple demandé comme solution ?

- Première valeur : on calcule log 35 155 = 4,545987102. Pour avoir une fin en 35 on remplace 02 par 35 et on vérifie que $10^{4,545987102}$ = 35 155, 0026 a bien 35 155 comme partie entière. On peut donc mettre 4,545987135 dans la liste de choix.

- Deuxième valeur : avec 4,712245551 on part de 51 et calcule 5x1 = 5 d'où 515 puis 1x5 = 5 d'où 5155 puis enfin 5x5 = 25 mais on ne garde que le 2 en 5^e chiffre d'où la réponse 51 552.

- **Le couple solution est : (4,545987135 ; 51 552).**

<u>Exercice 6 : Les 25 carrés confinés dans la grille 6x6</u>

On note a et b les 2 valeurs à trouver en haut à gauche, et on complète les cases de proche en proche, de façon à avoir la même somme de 4 cases d'un carré égale à la somme des 4 cases du carré du haut à gauche, soit 4+7+a+b = a+b+11.

a	4	a+1	b+5	3	b+6
b	7	b-1	a+3	0	a+2
1	a+3	2	7	b+1	8
b+1	6	b	a+2	1	a+1
a+3	1	a+4	b+2	6	b+3
4	b+3	3	2	a+1	1

Les carrés 2x2 dont la somme des 4 cases n'est pas expressément (a+b+11) ont pour somme (2a+2b+8). On en tire une seule équation 2a+2b+8 = a+b+11 d'où a+b = 3.

Comme a et b doivent être entiers on va étudier les 4 cas (a ; b) valant (0 ; 3), (1 ; 2), (2 ; 1), (0 ; 3). La somme des 4 cases de chaque carré 2x2 sera à chaque fois : 3+11 = 14.

Pour les trois premiers cas on obtient :

0	4	1	8	3	9		1	4	2	7	3	8		2	4	3	6	3	7
3	7	2	3	0	2		2	7	1	4	0	3		1	7	0	5	0	4
1	3	2	7	4	8		1	4	2	7	3	8		1	5	2	7	2	8
4	6	3	2	1	1		3	6	2	3	1	2		2	6	1	4	1	3
3	1	4	5	6	6		4	1	5	4	6	5		5	1	6	3	6	4
4	6	3	2	1	1		4	5	3	2	2	1		4	4	3	2	3	1

Dans le dernier cas avec (a ; b) = (3 ; 0) il y a une case qui doit valoir (b-1) soit -1 ce qui est impossible car toutes les cases doivent contenir des entiers positifs. Il n'y a donc que **3 grilles** solutions en tout.

<u>Exercice 7 : Les 11 ONZE</u>

La formulation 11 ONZE m'a plu, mais il y a 12 solutions.

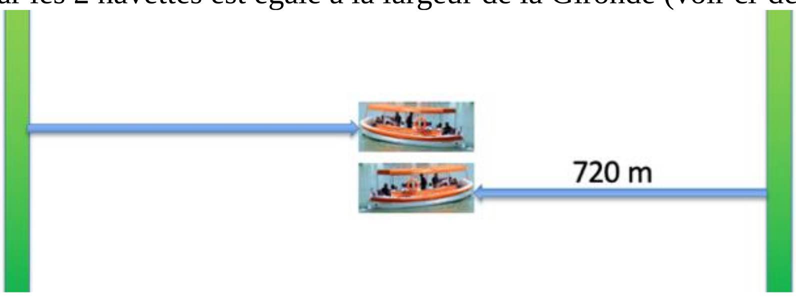
8462 = 4231+4231 ; 8412 = 4206+4206 ; 8432 = 4216+4216 ; 7316 = 3658+3658 ;

5286 = 2643+2643 ; 5216 = 2608+2608 ; 5236 = 2618 +2618 ; 5276 = 2638+2638 ;

5296 = 2648+2648 ; 2130 = 1065+1065 ; 2170 = 1085+1085 ; 8472 = 4236+4236.

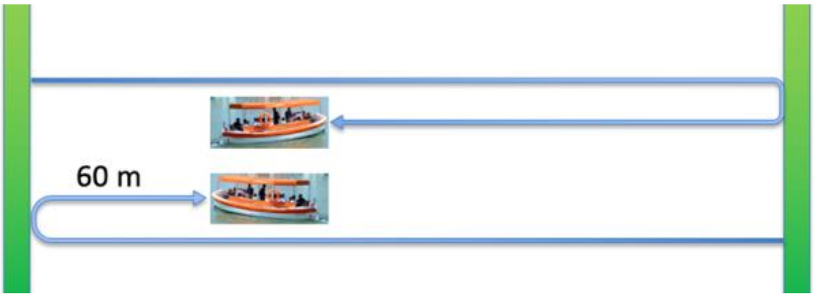
<u>Exercice 8 : Sur la Gironde</u>

Quand les 2 navettes se croisent pour la première fois, la somme des distances parcourues par les 2 navettes est égale à la largeur de la Gironde (voir ci-dessous).



Rive gauche Rive droite

Quand elles arrivent sur l'autre rive, la somme des distances parcourues par les 2 navettes est 2 fois la largeur de la Gironde. Quand elles se croisent pour la deuxième fois la somme des distances parcourues par les 2 navettes est 3 fois la largeur de la Gironde (voir ci-dessous).



Rive gauche Rive droite

Si les navettes se rapprochent l'une de l'autre d'une largeur de Gironde en un temps t, elles parcourent ensemble en ce temps t une fois cette largeur, et donc pour parcourir ensemble l'équivalent de trois fois cette largeur il leur faudra une durée de 3t. Comme les navettes ont des vitesses régulières pour la même période de temps, chaque navette aura parcouru 3 fois la distance qu'elle a faite au moment de la première rencontre.

Donc au deuxième croisement, la navette qui a démarré de la rive droite a parcouru 3 x 720 m = 2160 m, et elle a traversé une largeur de la Gironde plus 60 m.

Conclusion : la largeur de la Gironde est : 2160 – 60 = **2100 m.**

Précisions de Jean Gagnerault sur l'ex 8 : (voir fichier joint)

Martin Gardner a présenté cette énigme dans le tome 2 des Casse-tête mathématiques de Sam Loyd (problème n°14).

Compléments de solutions série 5

Extraits des explications de Daniel COLLIGNON

Info sur les cryptarithmes (comme ex 7) : voici une ressource utile :

https://www.dcode.fr/solveur-cryptarithme

Exercice 1 : 163 grammes (si livre anglaise) ou 180 grammes (si livre métrique).

Comme l'épaisseur est homogène, les masses des morceaux seront proportionnelles à leurs aires.
On utilise la formule du sinus donnant l'aire d'un triangle :
ABO : OA*OB*sin(BOA)/2 = (OD+DA)*OB*sin(BOA)/2
DOC : OC*OD*sin(COD)/2
On utilise le fait que les angles BOA et COD sont supplémentaires pour conclure :
ABO : 16sin(t)
DOC : 9sin(t)
Le petit morceau pèsera donc 9/25 en livre.

Reste à savoir si on parle de livre anglaise ou livre métrique, cf
https://fr.wikipedia.org/wiki/Livre_(unit%C3%A9_de_masse)

Exercice 2 : 2€
On vérifie qu'Ethan a consommé l'équivalent de Rodrigo et Maëlyne.
Ainsi la note de Maëlyne vaut 13-9=4 €.
Chacun prenant en charge la moitié, paiera 2€.

Exercice 3 : 72 cartes pour le gros tas, et 8 cartes enlevées du petit tas.

La manipulation réalisée peut facilement s'expliquer en binaire (cf un précédent énoncé) : si n est le nombre de cartes du tas, alors le numéro de la carte restante est obtenu en passant à droite le bit de poids fort de l'écriture binaire de n.
Comme 17 s'écrit (0)10001, nous cherchons n sous la forme 1(0)1000, soit 24, 40, 72, 136...
Seul 72 peut correspondre à la définition du gros tas (de 53 à 104 cartes).

Dans le petit tas de 104-72=32 cartes, il enlèvera 32-24=8 cartes pour réaliser le même exploit avec 24 cartes.

Référence : https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Jos%C3%A8phe

Exercice 4 : 3 grilles solutions

La face avant contient tous les nombres impairs de 1 à 19.
La face arrière contient tous les nombres pairs de 2 à 20.
Seules les arêtes entre les faces avant/arrière devront faire l'objet d'une attention pour éviter deux nombres qui se suivent.
Notons s la plus petite somme et r la raison de la suite arithmétique.
Alors s + s+r + s+2r + s+3r = 1+...+20 = 210
D'où 2s+3r = 105, d'où s=<52 est un multiple de 3 et r est impair.
Sur la face de droite, nous avons s>=20+2+3+5=30

J'ai laissé tourner un programme une bonne partie de la journée, mais cela reste insuffisant.

A la force brute il y a (8*8!)^2 cas théoriques à analyser soit 104 044 953 600 cas !

Aussi je ne sais répondre précisément à la question du nombre de solutions, mais une chose est certaine, il y a quand même beaucoup de solutions !

Exercice 8 : 2100 m

On note d>720 la largeur, v1 et v2 les vitesses des navettes (v1 de celle qui part de la rive gauche)

L'arrêt de 16 minutes (pas au même moment certes mais de même durée) n'apporte aucune information, on peut raisonner comme si les navettes repartaient immédiatement.
temps de premier croisement : (d-720)/v1 = 720/v2
temps entre premier et deuxième croisement : (720+d-60)/v1 = (d-720+60)/v2

D'où v1/v2 = (d-720)/720 = (660+d)/(d-660)

Ou encore d^2-720d-660d=720d
d non nul => d=2*720+660=2100

Extraits des réponses de Frank ZIMMER :

Exercice 4 : De la distanciation sociale, des voisins, et de la famille

A noter que le plan vertical avant ne contient que des nombres impairs (et l'arrière, des pairs).

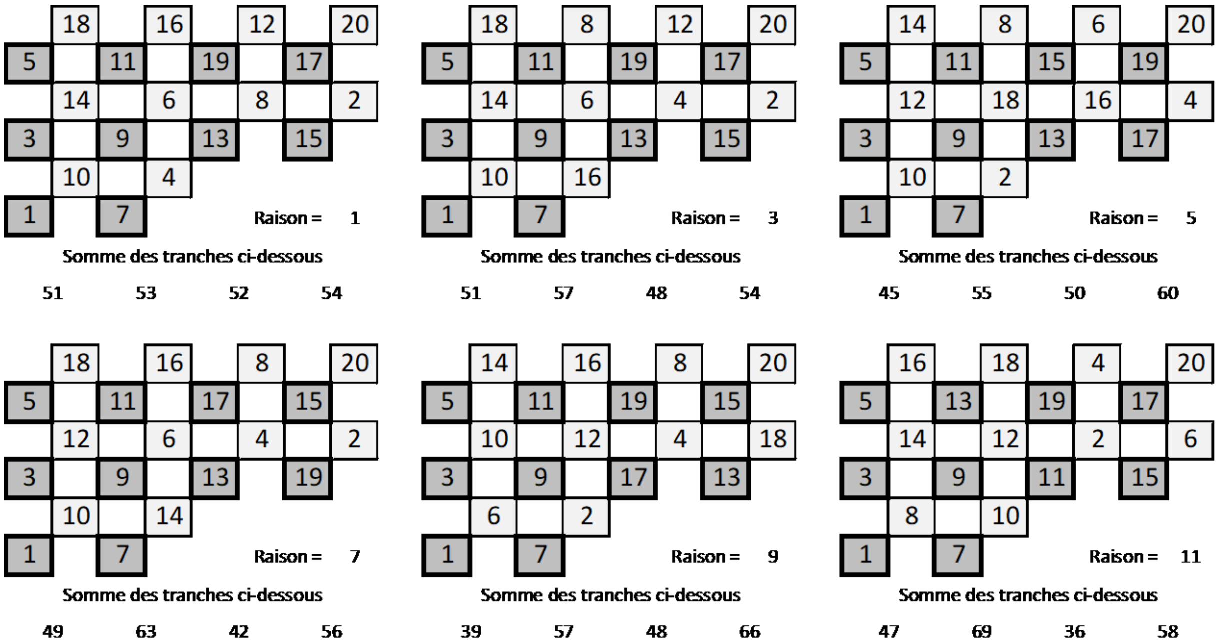
Dans ce cas, la somme de chacune des deux premières ''tranches'' est impaire (et des deux dernières, paire).

Voici un tableau donnant ces sommes, en fonction des raisons possibles :

Raison	Tranche 1 ou 2 somme impaire		Tranche 3 ou 4 somme paire		Total
1	51	53	52	54	210
3	51	57	48	54	210
5	45	55	50	60	210
7	49	63	42	56	210
9	39	57	48	66	210
11	47	69	36	58	210

Etc. (autres raisons impaires)

Et voici six solutions possibles (une par raison ci-dessus), mais il y en a beaucoup d'autres :



Synthèse de Michèle Dencourt :

Exercice 4

Pour chacune des 2 faces de droite, la somme de leurs 4 numéros est paire. Pour les 2 autres faces la somme de leurs 6 numéros est impaire.

De plus il semblerait que les seules suites arithmétiques possibles de 4 nombres représentant ces sommes dans un autre ordre soient les suites (S1,S2,S3,S4) listées dans le tableau suivant :

S1	18	24	30	33	36	39	42	45	48	51
S2	41	43	45	46	47	48	49	50	51	52
S3	64	62	60	59	58	57	56	55	54	53
S4	87	81	75	72	69	66	63	60	57	54

Commentaires de Christian Romon :

Justifications série 5

Exercice 1 : Les angles BÔA et CÔD sont supplémentaires et ont donc le même sinus. Les surfaces BOA et COD sont donc proportionnelles aux produits OBxOA4x8=32 et OCxOD=3x6=18 et donc la part de la sœur représente 18/(32+18)=18/50=0,36 du tout qui pèse 500 grammes. D'où le poids de la part de la sœur 0,36x500=180 grammes.

Exercice 2 : La différence entre la commande de Ethan et celle de Rodrigo donne exactement celle de Maëlyne, soit une note de 13-9=4 euros pour Maëlyne et donc 2 euros à verser par chacun des deux amis.

Exercice 3 : En retournant les 16 premières cartes on diminue le paquet de 8 cartes et la 17$^{\text{ième}}$ se retrouve en tête. Pour qu'elle garde la tête jusqu'à la fin il faut et il suffit qu'à ce moment le paquet contienne un nombre de cartes égal à une puissance de 2. En effet après avoir retourné tout le paquet la carte en tête est encore en tête et le nombre de carte a été divisé par 2 de telle sorte qu'il reste encore une puissance de 2, ce qui permet de réitérer le processus jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule carte, celle qui est en tête à chaque tour de paquet. Ainsi donc partant de N cartes l'équation pour finir sur la 17$^{\text{ième}}$ est N-8=2^k ou N=8+2^k. Avec k=5 on a N=8+32=40, plus petit que la moitié du jeu initial (104/2=52) donc ne constituant pas le plus gros paquet. Avec k=7 on a N=8+128=136 dépassant le paquet initial de 104 cartes. La seule solution est donc k=6 avec N=8+2^6=72 cartes pour le gros paquet et donc 104-72=32 cartes pour le petit paquet. A nouveau on va chercher n tel que n=8+2^p avec n plus petit que 32 mais plus grand que 17. La valeur p=3 n'est pas assez grande (n=8+2^3=16 cartes) et la valeur p=5 est trop grande (n=8+2^5=40). La seule solution est p=4 avec n=8+2^4=24. Il a donc fallu enlever 32-24=8 cartes pour que le tour fonctionne encore sur le deuxième paquet.

Exercice 4 : Appelons n la valeur de la plus petite face et r la raison de la progression arithmétique. La valeur totale des quatre faces vaut alors n+(n+r)+(n+2r)+(n+3r)=4n+6r qui doit être égale à la somme des 20 premiers entiers soit 210.. alors n est multiple de 3. n=15 ne marche pas car les 4 nombres sont alors 2+3+4+6 et 3 touche 2 ou 4 ce qui n'est pas acceptable. On peut faire un essai avec n=18 et r=(210-4x18)/6=23 soit pour les faces 18, 41, 64 et 87. Il y a effectivement des solutions comme pour la face avant (à gauche) et pour la face arrière (à droite):

9	19	3	15		6	16	8	20
7	17	5	11		4	12	2	18
1	13				14	10		

Face latérale 1 : Total 9+7+1+6+4+14=41
Face latérale 2 : Total 19+17+13+16+12+10=87
Face latérale 3 : Total 3+5+8+2=18
Face latérale 4 : Total 15+11+20+18=64

Exercice 5 : Le magicien a choisi les valeurs de logarithme en trichant un peu sur les deux derniers chiffres qui sont les deux premiers chiffres du nombre auquel il pense. Ensuite le truc mnémotechnique est de multiplier ces deux premiers chiffres entre eux pour constituer les chiffres suivants et de répéter ainsi en multipliant toujours entre eux les deux derniers chiffres du nombre en cours de constitution. On s'arrête quand on arrive ou on dépasse les 5 chiffres nécessaires et on ne tient pas compte du dernier chiffre si on a 6 chiffres. Par exemple avec 18, 1x8=8 donnant 188, suivi de 8x8=64, ce qui donne 18864. De même avec 73, il vient 7x3=21 soit 7321 puis 2x1=2 donnant 73212. De même avec 81, il vient 8x1=8 donnant 818 puis 1x8=8, donnant 8188, puis 8x8=64 dont on ne garde que le 6 pour obtenir 81886.
Pour un début de 35 le nombre est obtenu ainsi 3x5=15, soit 3515 puis 1x5=5 soit le nombre 35155. Son log est 4,545987102 que le magicien corrige en 4,545987135 en corrigeant les deux derniers chiffres, la base 35 lui permettant de reconstituer le nombre 35155.
Et pour le tirage de 4,712245551, il prend les deux derniers chiffres 51, puis 5x1=5 donnant 515, puis 1x5=5, donnant 5155, puis 5x5=25 donnant en conservant le 2 : 51552. Le comparse permet la vérification : 10^4,712245551=51552,00383

Exercice 6
Appelons N la valeur de l'entier situé dans la deuxième rangée en troisième position. On complète toute la grille en constatant qu'en sautant une colonne (resp ligne) sur deux les couples en vis-à-vis ont même somme. Il vient :

2-N	4	3-N	6+N	3	7+N
N+1	7	N	5-N	0	4-N
1	5-N	2	7	N+2	8
2+N	6	N+1	4-N	1	3-N
5-N	1	6-N	N+3	6	N+4
4	N+4	3	2	3-N	1

N doit être positif ou nul et inférieur ou égal à 2 (Voir 2-N en première case), d'où 3 valeurs pour N=0, 1 ou 2

Exercice 7
E est pair, N ou N+10 vaut 2E ou 2E+1 et enfin O vaut 2N ou 2N+1. Donc N est compris entre 1 et 4, ce qui élimine E=4 et E=8. Reste à regarder E=0, 2 et 6
On trouve 2 solutions E=0 : 1065x2=2130 et 1085x2=2170
On trouve 4 solutions E=2 : 4206x2=8412, 4216x2=8432, 4231x2=8462 et 4236x2=8472
On trouve 6 solutions E=6 : 3658x2=7316, 2648x2=5296, 2643x2=5286, 2638x2=5276, 2608x2=5216, 2618x2=5236
Soit en tout 12 solutions

Exercice 8
Soit d la largeur de l'estuaire.
Temps 0 : départ des deux bateaux

Temps 1 : Première rencontre. Le rapide a parcouru d-720 et le lent 720. Le rapport des vitesses est (d-720)/720

Temps 2 Deuxième rencontre. Regardons les trajets depuis le temps 0 jusqu'au temps 2 en enlevant le même temps d'immobilisation de 16 minutes, donc parcourus à vitesse constante : d+d-60=2d-60 pour le rapide et d+60 pour le lent. Le rapport des vitesses est (2d-60)/(d+60).

Ainsi donc (d-720)/720=(2d-60)/(d+60)

Ou encore (d-720)/ (2d-60)=720/(d+60)=d/3d=1/3

Et donc d+60=3x720 et d=3x720-60=2100 mètres

La formule peut paraître étonnement dissymétrique d=3d1-d2, mais on retrouve une symétrie avec la distance x entre les deux points de rencontre : x=d-d1-d2=2(d1-d2).