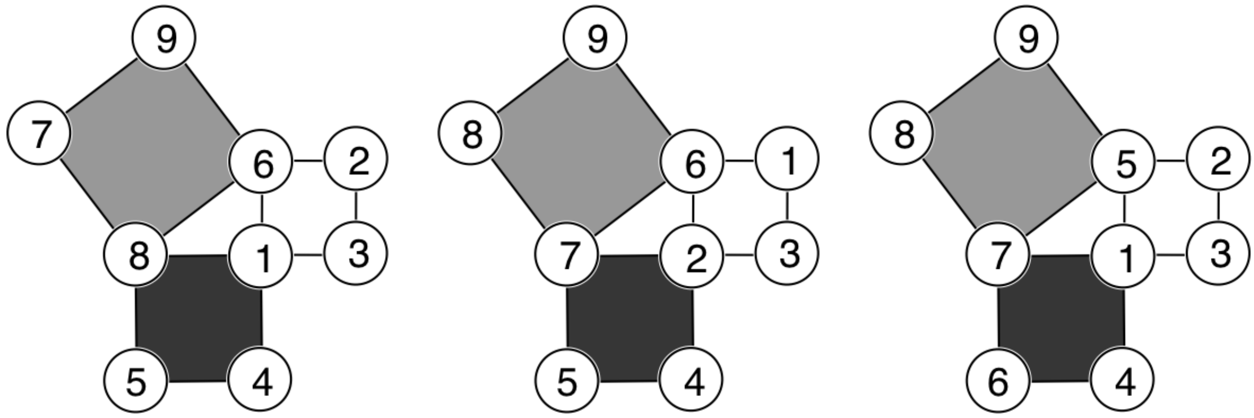
Les triplets de Pythagore

Si (x ; y ; z) est un triplet pythagoricien primitif, alors x et y sont de parités différentes et z est impair.
En effet, x, y et z ne peuvent être tous les trois pairs, sinon le triplet ne serait pas primitif (x, y et z ne seraient pas premiers entre eux). Donc l'un au moins des nombres x et y est impair (x et y pairs impliquerait que z soit pair).
Montrons maintenant que x et y ne peuvent être tous les deux impairs. Supposons que ce soit le cas et posons $x = 2p + 1$ et $y = 2q + 1$. On aurait alors $z^2 = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4(p^2 + p + q^2 + q) + 2$. Or un carré ne peut être égal à un multiple de 4 augmenté de 2, d'où une impossibilité qui entraîne que x et y sont de parités différentes et que z est impair.

$$x = m^2 - n^2 \; ; \; y = 2mn \; ; \; z = m^2 + n^2$$

Ce paramétrage implique bien que l'on ait $x^2 + y^2 = z^2$.

Le Pythagore
Le problème a trois solutions :



Triangles héroniens

Un triangle rectangle dont les longueurs des trois côtés sont des nombres entiers (dans une unité donnée) est un triangle héronien.
En effet, d'après ce que nous avons vu plus haut, les deux côtés de l'angle droit d'un tel triangle sont de parités différentes. Il en résulte que leur demi-produit, égal à l'aire du triangle rectangle dans l'unité correspondante, est un nombre entier.
Voici les longueurs des côtés des cinq triangles héroniens dont l'aire et le périmètre s'expriment à l'aide du même nombre entier (dans les unités correspondantes). Les deux triangles rectangles sont indiqués en gras.

5	**12**	**13**
9	10	17
7	15	20
8	**15**	**17**
6	25	29.