Finale 2020

Daniel Collignon

9 mai 2020

1 Roue de nombres

Les 8 premières valeurs sont :

Numéro du pavé	1	2	3	4	5	6	7	8
Numéro du quartier	7	6	5	4	3	2	1	8

La suite des numéros de quartier est 8_périodique.
Comme $21 = 2 \times 8 + 5$, le numéro du quartier coïncidant avec le 21ème pavé est le même qu'avec le 5ème pavé, soit 3.
Remarque : pour le pième pavé, ce numéro sera $8 - (p \bmod 8)$.

2 Les deux maisons

Notons a et o les numéros des maisons de Léa et Léo.
Nous avons les relations $a - o = 20$ et $a + o = 120$.
En les additionnant, il vient $2a = 20 + 120$, d'où $a = 70$.
Léa habite au numéro 70.

3 De 1 à 15

Le damier possèdant 8 cases grises et 7 cases blanches, privé d'1 case grise il est pavable avec 7 dominos : modulo symétrie/rotation, 3 configurations (case grise isolée : coin, milieu longueur ou intérieur) sont à vérifier.
La règle de l'énoncé impose que chaque domino porte au plus 1 nombre impair.
Il y a exactement 8 nombres impairs entre 1 et 15 : chaque case grise portera donc un nombre impair.
La somme cherchée vaut donc $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 16 \times 4 = 64$.

4 Les allumettes

Comme $10 = 2 \times 4 + 2$, Mathilde est sûre de gagner en prenant 2 allumettes, puis à 2 reprises le complément à 4 du jeu de Mathias.

Sinon elle perdra si Mathias joue le même 1er coup qu'elle (1/1 ou 3/3), et suit ensuite la stratégie du complément à 4 du jeu de Mathilde.

5 Qui a volé l'orange ?

Parmi Alice et Maël, l'un des deux ment, sinon nous aurions 2 coupables.
Ainsi Fanny dit la vérité : Alice est donc la menteuse.
Alors Maël dit la vérité : Alice est donc la coupable.
La phrase (vraie) de Kevin n'entraîne pas de contradiction.
Alice a donc volé l'orange.

6 Empilement de dés

3 dés touchent la table (bas), et le dé d'angle touche les 3 autres, soit $3+2\times3=9$ faces non visibles.
Minimisation des faces non visibles :

- Dé du dessus : 1 est visible, donc 2
- Dé à droite : 1 est visible, donc 2+3
- Dé devant : 1 est visible, donc 6+2
- Dé d'angle : 1+2+7(3-4)

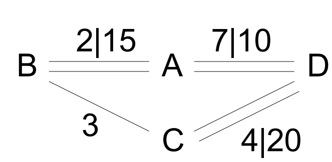
D'où $2\times4+3+6+1+7=25$.
Si toutes les faces étaient visibles, les 4 dés totaliseraient $4\times3\times7=84$.
Ainsi la somme des nombres visibles vaut au maximum $84-25=59$.
Variante : maximisation des $4\times6-9=15$ faces visibles :

- Dé du dessus : 7(1-6) + 5 (dessus) + 7 (3-4)
- Dé à droite : 7(1-6) + 5+4 (dessus et droite)
- Dé devant : 1, et comme 6 est non visible, donc 5 (dessus) + 7 (3-4)
- Dé d'angle : 6 + 5

D'où $7\times4+5\times4+4+1+6=59$.

7 Balade en forêt

Représentons G le graphe des carrefours (sommets) et des 7 chemins (arêtes).



Tout circuit A...A est un sous-graphe de G possédant des sommets de degré pair. Dans G les sommets B et C étant de degré 3, impair, cela nécessite la suppression d'au moins 1 arête. Tout circuit empruntera donc au plus 6 arêtes. Listons méthodiquement les circuits :

- élémentaires (pas d'arrêt intermédiaire en A)
  - 2 arêtes : ABA et ADA, conduisant 2 fois à 17=2+15=7+10
  - 4 arêtes : ADCDA (17+4+20=41) et ABCDA, (2|15)+3+(4|20)+(7|10), conduisant à 16, 19, 29, 32 (2 fois), 35, 45, 48
- longs (arrêt intermédiaire en A), obtenus comme combinaison de 2 circuits élémentaires
  - 4 arêtes : ABADA (17+17=34)
  - 6 arêtes : ABADCDA (17+41=58)

D'où 11 distances distinctes : 16, 17, 19, 29, 32, 34, 35, 41, 45, 48, 58

8 Partage équitable

Rappelons la formule $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Une condition nécessaire pour que le partage soit possible est d'avoir $\frac{n(n+1)}{4}$ entier, d'où $n \equiv 0$ ou 3 (mod 4).
Puisque $9 \leqslant n \leqslant 20$, alors les candidats sont $n = 11$, 12, 15, 16, 19 ou 20.
Pour chacun, exhibons un exemple de partage (les jetons restants donnant l'autre groupe) :

n	$\frac{n(n+1)}{4}$	un groupe du partage
11	33	11+10+9+3
12	39	12+11+10+6
15	60	15+14+13+12+6
16	68	16+15+14+13+10
19	95	19+18+17+16+15+10
20	105	20+19+18+17+16+15

9 Maths en jean

A chaque lavage 10 cm^2 de tissu sont remplacés par 10 cm^2 de trou, aussi l'aire totale (tissu + trous) reste constante et vaut $6000 \times 1,2 = 7200$ cm^2.
Il y aura autant de surface de trous que de surface de tissu, lorsque cette dernière atteindra $\frac{7200}{2} = 3600$ cm^2.
Pour y parvenir, cela nécessitera $\frac{6000-3600}{10} = 240$ lavages.

10 Morpions

Dans une grille 4x3, le maximum est de 7 pions.
Nous l'illustrons avec les configurations 232, 322, 322 (chaque chiffre désigne le nombre de pions O dans chacune des colonnes, X désignant des cases interdites)

O	O	X
O	X	O
X	O	O
X	O	X

ou

O	O	X
X	X	O
O	X	O
O	O	X

ou

O	O	X
X	O	O
O	X	X
O	X	O

S'il était possible d'avoir 8 pions, alors il y aurait exactement 2 colonnes de 3 puisque $8 = 3 \times 2 + 2$.
Cas 33? : 330 (à gauche) ou 331 (à droite, une autre illustration du maximum à 7)

O	O	X
O	O	X
X	X	X
O	O	X

ou

O	O	X
O	X	X
X	O	O
O	O	X

Cas 3?3 : 303 dans les 2 cas

O	X	O
O	X	O
X	X	X
O	X	O

ou

O	X	O
O	X	X
X	X	O
O	X	O

Retour à notre problème sur la grille 4x7.
Un pavage de la grille 4x7 à l'aide de 9 triminos (rectangles 1×3) founit un majorant $4 \times 7 - 9 = 19$.
Il est aisé de trouver des configurations à 15 pions telles que :

O	O	X	O	X	O	O
O	O	X	O	X	O	O
X	X	X	X	X	X	X
O	O	X	O	X	O	O

Mais des configurations à 16 pions existent :

O	O	X	O	X	O	O
O	X	X	X	O	O	X
X	O	O	X	X	X	O
O	O	X	O	X	O	O

ou

O	O	X	O	X	O	O
O	X	X	X	X	X	O
X	O	O	X	O	O	X
O	O	X	O	X	O	O

La grille 4x7 étant formée de 2 grilles 4x3 (max 7) et d'1 colonne (max 3), il est inutile d'espérer faire mieux que $2 \times 7 + 3 = 17$.
S'il existait une configuration à 17 pions, alors la configuration à partir de la colonne du milieu (celle à 3) serait 3133, 3331, 3322, 3232 (4 cas impossibles d'après ce qui précède) ou 3223. A l'aide des 2 grilles 322 vues tout au début, nous vérifions qu'au mieux on pourrait atteindre 3222.

O	O	X	O
X	X	O	X
O	X	O	X
O	O	X	O

ou

O	O	X	O
X	O	O	X
O	X	X	X
O	X	O	O

11 Le nombre magique

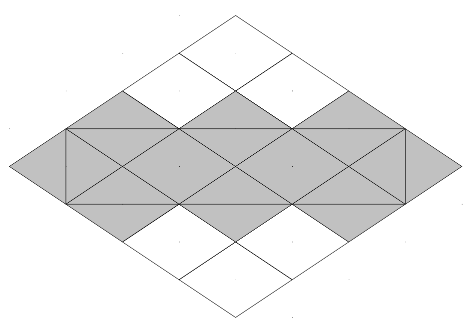
Le nombre de mathilde s'écrit $n = mcdu$ avec $c = 2m$ et $u = 2d$. Aucun chiffre n'étant nul , nous avons$1 \leqslant m, d \leqslant 4$.
La somme des chiffres de n vaut $s = m + c + d + u = 3\,(m + d)$.
D'où $\frac{n}{s} = \frac{12(100m+d)}{3(m+d)} = 4 + \frac{2^2 3^2 11 m}{m+d}$ est un nombre entier.
Parmi les valeurs $2 \leqslant m + d \leqslant 8$, nous écartons 5 et 7 (facteurs absents de la factorisation du numérateur), les autres valeurs fournissant au moins une solution chacune.

$m+d$	2	3	3	4	4	4	6	6	6	8
m	1	1	2	1	2	3	2	3	4	4
d	1	2	1	3	2	1	4	3	2	4

Il y a 10 solutions : 1212, 1224, 1236, 2412, 2424, 2448, 3612, 3636, 4824, 4848.

12 Le rapport géométrique

Plusieurs façons de résoudre ce problème.
Par le calcul, en nommant g la grande diagonale et p la petite diagonale : l'aire du losange vaut $\frac{gp}{2}$ et celle du rectangle $\frac{p}{4}\frac{3g}{4} = \frac{3pg}{16}$, d'où le ratio $\frac{3}{8}$.
Dans le cas d'un carré de côté $2c$: l'aire du rectangle vaut $\frac{c\sqrt{2}}{2} \times \frac{3c\sqrt{2}}{2} = \frac{3c^2}{2}$, d'où le ratio $\frac{3}{8}$.
Une démonstration visuelle : en traçant les parallèles au quart, le grand losange est pavé de 16 petits losanges ; l'aire du rectangle est équivalente à 6 petits losanges, d'où le ratio $\frac{3}{8}$.



13 La condition d'égalité

Par symétrie, nous avons $AB = AD$, ainsi que l'égalité des aires des triangles ADF et CDF. Ces derniers ayant même hauteur issue de F, les bases AD et CD ont donc même longueur.
D'où $AC = AD + DC = 2AD$ et donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{2AD} = \frac{1}{2}$.

14 En ajoutant 20

Mathilde a choisi un nombre N ayant n chiffres avec $1 \leqslant n \leqslant 6$.
Mathias a construit les nombres $A = 20 \times 10^n + N$ et $B = 100N + 20$.

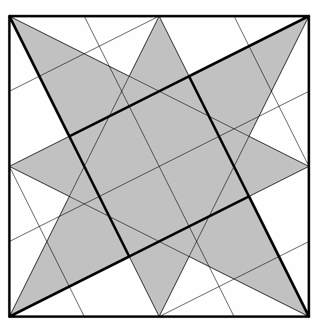
- Cas $2A = 5B$ qui se réécrit en $10\,(2 \times 10^n - 5) = 3 \times 83N$. D'où $2 \times 10^n \equiv 5 \pmod{83}$ ou encore $10^n \equiv 44 \pmod{83}$. Pour $n = 2..6$, les résidus des puissances de 10^n modulo 83 sont congrus à 17, 4, 40, 68, 16 : pas de solution.

- Cas $5A = 2B$ qui se réécrit en $20 \times 10^n - 8 = 3 \times 13N$. D'où $20 \times 10^n \equiv 8 \pmod{13}$ ou encore $10^n \equiv 3 \pmod{13}$. Pour $n = 2..6$, les résidus des puissances de 10^n modulo 13 sont congrus à 9, 12, 3, 4, 1 : $n = 4$ conduit à $N = \frac{20 \times 10^4 - 8}{39} = 5128$.

Mathilde avait choisi le nombre 5128.

15 Ma part d'étoile

Plusieurs façons de résoudre ce problème.
Par le calcul, en nommant$2c$ la longueur du côté du carré, nous montrons que l'aire d'un des 8 triangles blancs vaut $\frac{c \times \frac{2c}{5}}{2} = \frac{c^2}{5}$, d'où le ratio $1 - \frac{\frac{8c^2}{5}}{4c^2} = 1 - \frac{2}{5} = 60\%$.
Une démonstration visuelle : en traçant les parallèles au quart, le carré est pavé de 20 triangles blancs, l'aire de l'étoile est équivalente à $20 - 8 = 12$ triangles, d'où le ratio $\frac{12}{20} = 60\%$



16 Douze diviseurs

Un nombre admettant 12 diviseurs est de la forme p^{11}, pq^5, p^2q^3, pqr^2.
Nous écartons p^{11} car le 7ème diviseur ne sera pas premier.
Pour pq^5

- q ne peut être le 7ème diviseur, car au moins $12 - 3 = 9$ diviseurs lui sont supérieurs
- p peut être le 7ème diviseur si $q^5 < p$.
  - $q^{10} < pq^5 < 2101$ entraîne $q = 2$
  - $\frac{2100}{q^5} \geqslant p > \frac{2020}{q^5}$, mais $p = 64$ ou 65 sont composés : pas de solution

Nous écartons p^2q^3.

- q ne peut être le 7ème diviseur, car au moins $12 - 4 = 8$ diviseurs lui sont supérieurs
- p peut être le 7ème diviseur, car au moins $12 - 5 = 7$ diviseurs lui sont supérieurs

Pour pqr^2, quitte à échanger leur rôle, nous supposerons $p < q$.

- p ne peut être le 7ème diviseur, car au moins $12 - 4 = 8$ diviseurs lui sont supérieurs
- q peut être le 7ème diviseur si $pr^2 < q$.
  - $p^2r^4 < pqr^2 \leqslant 2100$ entraîne $pr^2 \leqslant 45$
  - $\frac{2100}{pr^2} \geqslant q > \frac{2020}{pr^2}$
  -

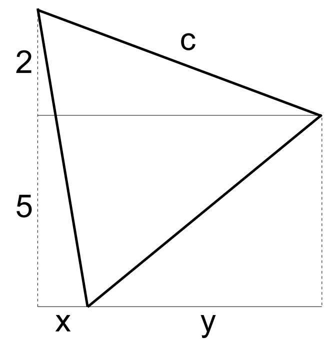
r	2	2	2	2	3	3
p	3	5	7	11	2	5
$[q_{\min}; q_{\max}]$	169-175	102-105	73-75	46-47	113-116	45-46
q premier	173	103	73	47	113	-

- r ne peut être le 7ème diviseur, car au moins $12 - 5 = 7$ diviseurs lui sont supérieurs

Il y a donc 5 années : 2034, 2044, 2060, 2068, 2076.

17 La forêt triangulaire

Notons c la longueur du côté du triangle équilatéral, x (resp. y) la distance entre le sommet du bas et la projection du sommet à gauche (resp. droite) sur la route du bas.



Le théorème de Pythagore fournit les 3 relations :

- (1) $x^2 + 7^2 = c^2$
- (2) $y^2 + 5^2 = c^2$
- (3) $(x+y)^2 + 2^2 = c^2$

De (3)-(2), nous en déduisons $y = \frac{21-x^2}{2x}$.
(2)-(1) entraîne $\left(\frac{21-x^2}{2x}\right)^2 - x^2 = 24$, d'où $x^4 + 46x^2 - 147 = 0$, admettant pour solution $x^2 = -23 + \sqrt{23^2 + 147} = 3$.
Nous déduisons alors de (1), $c^2 = 52$.
Finalement $c = 2\sqrt{13} \approx 7,211$.

18 Carrés petits et grands

Le nombre de carrés de toute taille dans un rectangle $a \times b$ avec $a \leqslant b$, vaut $c = \sum_{i=0}^{a-1} (a-i)(b-i) = \sum_{j=1}^{a} j(j+b-a)$ en posant $j = a - i$.
A l'aide de $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, nous en déduisons $c = \frac{a(a+1)(2a+1)}{6} + \frac{(b-a)a(a+1)}{2}$.
D'où $c = \frac{a(a+1)(3b-a+1)}{6}$.
Nous cherchons donc $a \leqslant b$ tels que $c = 1365 = 3 \times 5 \times 7 \times 13$.
Alors $a(a+1)(3b-a+1) = 6c$.
L'inégalité $a \times a \times 2a < a(a+1)(3b-a+1)$ se simplifie en $a^3 < 3c = 4095 < 2^{12}$, d'où $a < 16$.
Nous excluons des valeurs de a, les facteurs absents de la factorisation de $6c$ étant spécifiés entre parenthèses : 3 et 4 (2^2), 7 et 8 (2^3), 10 et 11 (11), 12 (2^2), 15 (2^4).

a	1	2	5	6	9	13	14
$a+1$	2	3	6	7	10	14	15
$3b-a+1$	4095	1365	273	195	91	45	39
b entier	1365	-	-	-	33	19	-

Il y a donc 3 solutions $a \times b = 247$, 297 ou 1365.