La construction du carré magique d'ordre pair revisitée

La Méthode du carré naturel alterné

Les colonnes du carré naturel alterné sont « magiques », de somme égale à la constante magique du carré magique normal de même ordre.
C'est sur cette propriété bien connue que se base une méthode de construction du carré magique normal d'ordre pair.
Exemple ci-contre d'ordre n = 4

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
34	34	34	34

Ce carré naturel alterné étant considéré comme « grille-départ », il s'agit donc d'établir la magie dans les lignes de cette grille pour obtenir un carré magique.
La technique utilisée est alors la *Méthode des permutations dans les colonnes*. On procède ligne par ligne. Ces permutations n'altèrent pas la magie dans les colonnes.
Voici deux solutions. Les cases permutées sont pochées.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
34	34	34	34

8	10	11	5	34
1	7	6	4	
9	2	3	12	
16	15	14	13	
34	34	34	34	

1^e ligne

8	10	11	5	34
1	15	6	12	34
9	2	3	4	
16	7	14	13	
34	34	34	34	

2^e ligne

	8	10	11	5	34
	1	15	6	12	34
	9	7	14	4	34
	16	2	3	13	34
34	34	34	34	34	50

3^e & 4^e lignes

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13
34	34	34	34

1	15	14	4	34
8	7	6	5	
9	10	11	12	
16	2	3	13	
34	34	34	34	

1^e ligne

1	15	14	4	34
8	10	11	5	34
9	7	6	12	
16	2	3	13	
34	34	34	34	

2^e ligne

	1	15	14	4	34
	8	10	11	5	34
	9	7	6	12	34
	16	2	3	13	34
38	34	34	34	34	30

3^e & 4^e lignes

On obtient deux carrés semi-magiques, dont l'un avec une seule diagonale magique. Bien sûr *ces carrés semi-magiques ont la même formation que celle de la grille-départ.*
Il y a peut-être d'autres solutions, mais en nombre très limité.

La Méthode des couples complémentaires.

Dans toute série des premiers entiers en nombre N pair, on peut former avec les nombres complémentaires, $\frac{N}{2}$ couples de somme constante, S = N + 1.

Exemple avec la série des N = 16 premiers nombres entiers :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

On forme ainsi $\frac{N}{2}$ = 8 *couples complémentaires* de somme constante S = N + 1 = 17

1 - 16	2 - 15	3 - 14	4 - 13	5 - 12	6 - 11	7 - 10	8 - 9

On peut alors imaginer de placer ces 8 couples de nombres complémentaires dans les dominos verticaux d'une grille d'ordre n = 4, de 16 cases, dans un ordre quelconque : les colonnes sont toutes magiques, de somme constante M_4 = 2 x 17 = 34.
Cette somme constante est précisément la constante magique M_4 du carré magique normal d'ordre n = 4.

1	14	12	10
16	3	5	7
15	13	11	9
2	4	6	8
34	34	34	34

Comme dans la méthode qui précède, cette grille étant considérée comme « grille-départ », il s'agit d'établir la magie dans les lignes pour obtenir au carré magique. On peut employer la même *Méthode des permutations dans les colonnes.*

Il y a de nombreuses façons de placer les 8 couples dans les dominos verticaux de la grille de 16 cases ; en principe on peut dénombrer : 8 ! = 40 320 placements différents.

Cette méthode, si elle se confirme, serait ainsi, en théorie, particulièrement prolifique.

Remarques

	1	1	2	3	4
A	2	8	7	6	5
	3	9	10	11	12
	4	16	15	14	13
		34	34	34	34

	1	1	2	3	4
B1	4	16	15	14	13
	3	9	10	11	12
	2	8	7	6	5
		34	34	34	34

Type IV Dudeney

	1	1	2	3	4
B2	2	8	7	6	5
	4	16	15	14	13
	3	9	10	11	12
		34	34	34	34

Type V Dudeney

Dans le carré naturel alterné « A » d'ordre n = 4 pris pour exemple lors de la présentation de la première méthode, si l'on permute les lignes 2 et 4, on obtient en « B1 » l'une des formes de la grille-départ de la Méthode des couples complémentaires, de Type IV de Dudeney.

De même façon, si l'on permute les lignes 3 et 4, on obtient en « B2 » une grille-départ de Type V de Dudeney.

Ainsi la *Méthode dite du carré naturel alterné* n'est-elle qu'un cas particulier de la *Méthode des couples complémentaires :* en réalité, les deux méthodes n'en font qu'une.

Cela dit, voici une solution pour cette seconde méthode, avec notre exemple de placement des couples complémentaires, d'ordre n = 4 :

1	14	12	10
16	3	5	7
15	13	11	9
2	4	6	8
34	34	34	34

1	14	12	7	34
16	3	5	10	
15	13	11	9	
2	4	6	8	
34	34	34	34	

1^e ligne

1	14	12	7	34
16	3	5	10	34
15	13	11	9	
2	4	6	8	
34	34	34	34	

2^e ligne

	1	14	12	7	34
	16	3	5	10	34
	15	4	6	9	34
	1	13	11	8	34
38	34	34	34	34	30

3^e & 4^e lignes

Dans le cas de notre exemple, l'application de la *Méthode des permutations dans les colonnes*, conduit bien à un carré semi-magique, de même formation que celle de la grille-départ.
En est-t-il toujours ainsi ? : les nombreux placements possibles des couples complémentaires dans les dominos verticaux de la grille de 16 cases, conduisent-t-ils toujours à un carré semi-magique ?

Une généralisation

	1	1	2	3	4	5	6
	2	12	11	10	9	8	7
A	3	13	14	15	16	17	18
	4	24	23	22	21	20	19
	5	25	26	27	28	29	30
	6	36	35	34	33	32	31
		111	111	111	111	111	111

	1	1	2	3	4	5	6
	6	36	35	34	33	32	31
B	3	13	14	15	16	17	18
	4	24	23	22	21	20	19
	5	25	26	27	28	29	30
	2	12	11	10	9	8	7

	1	2	3	4	5	6
B	13	14	15	16	17	18
	12	11	10	9	8	7

On peut adapter la construction de la grille-départ de cette méthode à tous les ordres normaux pairs.
Par exemple pour n = 6, il faudra placer 3 couples complémentaires pris dans la série des N = 36 premiers entiers, dans chaque colonne.
La série des 36 premiers entiers donne 18 couples de nombres complémentaires, de somme S = N + 1 = 37 : 1-36 ; 2-35 ; 3-34 ; 4-33 ; 5-32 ; 6-31 ; etc . . . numérotés de 1 à 18.
Ainsi 3 couples complémentaires dans une colonne, donnent bien une somme totale S = 3 x 37 = 111, qui correspond à la constante magique du carré magique normal de même ordre M_6 = 111.
D'une façon générale, le nombre de couples complémentaires à placer dans chaque colonne de la grille-départ, en fonction de l'ordre « n » du carré magique concerné, est égale à $\frac{n}{2}$.
Pour n = 6, il suffit de permuter les lignes 2 et 6 du carré naturel alterné « A », pour obtenir un placement régulier systématique des couples complémentaires dans les dominos verticaux de la grille de 36 cases « B ».
Cette méthode ne semble conduire, a priori, qu'à des carrés semi-magiques ?

A la recherche d'un placement des couples complémentaires

Existe-t-il une règle pour le placement des couples complémentaires, qui conduise sûrement à un carré magique ou semi-magique ?
Pour faciliter cette recherche, numérotons les couples complémentaires de notre exemple n = 4, tels qu'ils se présentent :

1 - 16	2 - 15	3 - 14	4 - 13	5 - 12	6 - 11	7 - 10	8 - 9
1	2	3	4	5	6	7	8

	1	2	3	4	
B	16	15	14	13	
	9	10	11	12	
	8	7	6	5	
34	34	34	34	34	34

1	2	3	4
8	7	6	5

1			4	
	15	14		
16	7	6	5	34
9			12	

Dans le cas où la grille-départ est la *carré naturel alterné modifié* « B », il s'agit d'un placement des couples complémentaires qui n'est pas dû au hasard, mais qui est systématique (ci-dessus).

Dans ce cas particulier, on remarque que les diagonales principales de la grille « B » sont aussi magiques, de somme M_4 = 34, et cette grille-départ conduirait alors à un carré magique !

Hélas ! Si l'on maintient à leur place les nombres situés sur ces diagonales principales, on ne peut rendre magique qu'une seule ligne (figure de droite page précédente)

1	14	12	10
16	3	5	7
15	13	11	9
2	4	6	8

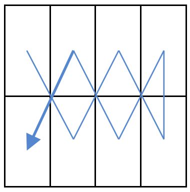
1	3	5	7
2	4	6	8

Dans la grille-départ de la seconde méthode, il s'agit également d'un placement systématique des couples complémentaires.

Voici un autre placement systématique :

1	7	3	5
16	10	14	12
8	2	6	4
9	15	11	13

1	7	3	5
8	2	6	4



1	7	3	5
16	10	14	12
8	2	6	4
9	15	11	13
34	34	34	34

8	10	3	13	34
16	7	14	12	
1	2	6	4	
9	15	11	5	
34	34	34	34	

1e ligne

8	10	3	13	34
9	7	14	4	34
1	2	6	12	
16	15	11	5	
34	34	34	34	

2e ligne

	8	10	3	13	34
	9	7	14	4	34
	16	2	11	5	34
	1	15	6	12	34
30	34	34	34	34	38

3e & 4e lignes

On obtient bien un carré semi-magique.

Peut-on en déduire que *les placements systématiques* des couples complémentaires conduisent à un carré magique ou semi-magique : une hypothèse ?

Et voici un placement *au hasard* des couples complémentaires :

4	1	7	5
13	16	10	12
6	2	3	8
11	15	14	5

4	1	7	5
6	2	3	8

4	1	7	5
13	16	10	12
6	2	3	8
11	15	14	9
34	34	34	34

13	2	10	9	34
4	16	7	12	
6	1	3	8	
11	15	14	5	
34	34	34	34	

1e ligne

13	2	10	9	34
11	1	14	8	
6	16	3	12	
4	15	7	5	
34	34	34	34	

2e ligne

	13	2	10	9	34
	11	1	14	8	34
	6	16	7	5	34
	4	15	3	12	34
43	34	34	34	34	33

3e & 4e lignes

Ce placement au hasard conduit aussi à un carré semi-magique . . .

En fait, tous les essais que j'ai faits, cependant en nombre relativement limité, avec des placements des couples complémentaires de diverses façons, systématiques et au hasard, ont conduit à un carré semi-magique.
Cela ne permet pas de conclure que la *Méthode des couples complémentaires* conduit toujours à un carré semi-magique : il faudrait un plus grand nombre d'essais sur différents ordres pairs, pour étayer notre hypothèse, et ce ne serait pas encore une démonstration.

Un essai de dénombrement pour n = 4.

Pour n = 4, on connait le nombre de carrés magiques normaux de cet ordre : Bernard Frénicle de Bessy a catalogué (1693) dans sa célèbre *Classification*, 880 carrés magiques normaux de base d'ordre n = 4 (1)
Les 880 carrés magiques de base de la Classification de Frénicle, ont été eux-mêmes répartis en 12 groupes ou types par Henry Dudeney : voici dans la page qui précède, ces 12 groupes ou types de Dudeney (2).

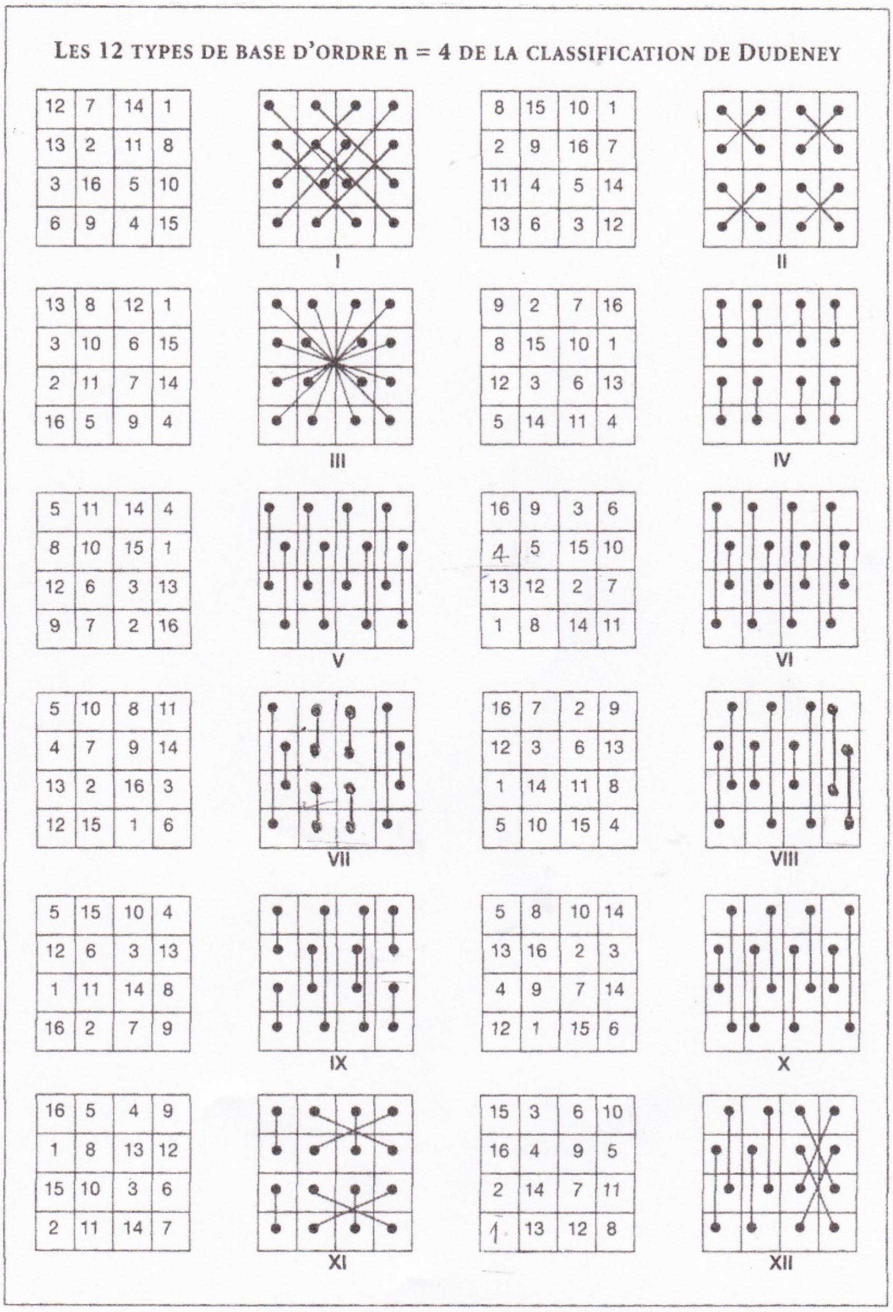
On remarque alors que les grilles des 7 types depuis IV jusqu'à X, comportent dans chacune des quatre colonnes un placement de deux couples complémentaires, de somme $n^2 + 1 = 17$.
Sur les 880 carrés magiques de base, on en a dénombré au total 512 comportant cette formation.
Mais on n'a pas dénombré les carrés semi-magiques d'ordre n = 4. Ils sont très nombreux.

On a bien trouvé une méthode pour dénombrer les carrés semi-magiques d'ordre n = 3 (3), mais la manipulation et l'analyse des combinaisons dont le nombre et la longueur croissent rapidement, deviennent prohibitives pour l'exploitation de cette méthode au-delà de n = 3.

Si l'on admet que tout placement de deux couples complémentaires dans les quatre colonnes d'une grille d'ordre n = 4 de 16 cases, conduit bien à un carré semi-magique, alors la *Méthode dite des couples complémentaires* nous donne, au moins, pour n = 4, avec ses 40 320 solutions, un ordre de grandeur de ce dénombrement. Et la méthode pourrait être qualifiée de très prolifique.
Cependant au sein de ce dénombrement se trouvent nécessairement un certain nombre de carrés magiques, mais en nombre limité.

---

1) Bernard Frénicle de Bessy – *Des Quarrez ou tables magiques – Tables générales des quarrez magiques de quatre* – Publié après sa mort par Pierre de la Hire dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. V, pp. 209 – 303, en 1729.
Dans son ouvrage, *Les carrés magiques*, Editions Economica, 2005, 250 pp, Jean-François Phélizon a eu la bonne idée de présenter les 880 carrés magiques d'ordre n = 4 de la Classification de Frénicle, en les regroupant suivant les 12 types de Dudeney, pp. 211-231 : c'est présentation la plus pratique des 880 carrés magiques de base d'ordre n = 4.
2) Henry Ernest Dudeney – *Amusements in Mathematics* (1958) – Dover Publications New York, 1970, p. 12
3) cf. Michel Criton et René Descombes – *Nouvelles approches des carrés magiques* – Editions ellipses 2017, 402pp. Chapitre 29 – Les carrés semi-magiques, pp. 259 – 277 : A la recherche des carrés semi-magiques d'ordre n = 3, une méthode inédite.



12	7	14	1
13	2	11	8
3	16	5	10
6	9	4	15

8	15	10	1
2	9	16	7
11	4	5	14
13	6	3	12

13	8	12	1
3	10	6	15
2	11	7	14
16	5	9	4

9	2	7	16
8	15	10	1
12	3	6	13
5	14	11	4

5	11	14	4
8	10	15	1
12	6	3	13
9	7	2	16

16	9	3	6
4	5	15	10
13	12	2	7
1	8	14	11

5	10	8	11
4	7	9	14
13	2	16	3
12	15	1	6

16	7	2	9
12	3	6	13
1	14	11	8
5	10	15	4

5	15	10	4
12	6	3	13
1	11	14	8
16	2	7	9

5	8	10	14
13	16	2	3
4	9	7	14
12	1	15	6

16	5	4	9
1	8	13	12
15	10	3	6
2	11	14	7

15	3	6	10
16	4	9	5
2	14	7	11
1	13	12	8

Remarque

On observe encore que les carrés semi-magiques obtenus, du moins ceux que j'ai testés, sont soit des carrés semi-magiques avec 4 quartiers égaux (par exemple ceux construits avec un placement systématique des couples complémentaires), soit des carré semi-magiques à quartiers opposés égaux (ainsi ceux construits avec un placement au hasard des couples complémentaires)

34	34
34	34

8	10	11	5
1	15	6	12
9	7	14	4
16	2	3	13

13	2	10	9
11	1	14	8
6	16	7	5
4	15	3	12

27	41
41	27

Une application de la méthode des couples complémentaires pour n = 8

1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	16	15	14	13	12	11	10	9
3	17	18	19	20	21	22	23	24
4	32	31	30	29	28	27	26	25
5	33	34	35	36	37	38	39	40
6	48	47	46	45	44	43	42	41
7	49	50	51	52	53	54	55	56
8	64	63	62	61	60	59	58	57
	260	260	260	260	260	260	260	260

B

1	1	2	3	4	5	6	7	8
8	64	63	62	61	60	59	58	57
2	16	15	14	13	12	11	10	9
7	49	50	51	52	53	54	55	56
3	17	18	19	20	21	22	23	24
6	48	47	46	45	44	43	42	41
4	32	31	30	29	28	27	26	25
5	33	34	35	36	37	38	39	40

260 260 260 260 260 260 260 260 260 260

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25

Par différentes permutations des lignes du carré naturel alterné d'ordre n = 8, on obtient un placement régulier des couples complémentaires, numérotés de 1 à 32, dans les dominos verticaux de la grille-départ de même ordre « B ».

La somme constante, ou *Constante de polarisation*, de ces couples complémentaires est

$S = n^2 + 1 = 65$. Les colonnes sont magiques, de constante magique $M_8 = 4 \times 65 = 260$.

On peut remarquer que dans la grille-départ « B », les diagonales principales sont aussi magiques.

Il y a un nombre extraordinaire, inimaginable, de placements des 32 couples complémentaires dans la grille-départ « B » de 64 cases, un nombre de 36 chiffres :

32 ! = 263 130 836 933 396 530 167 218 012 160 000 000

On peut dire que les familles de carré magiques sont des *familles nombreuses !*

Nous allons nous contenter d'appliquer la construction du carré magique correspondant à la grille-départ « B » ci-dessus. Les nombres permutés dans les colonnes correspondent aux cases pochées.

On procède ligne par ligne, selon la technique habituelle.

1	2	3	4	5	6	7	8
64	63	62	61	60	59	58	57
16	15	14	13	12	11	10	9
49	50	51	52	53	54	55	56
17	18	19	20	21	22	23	24
48	47	46	45	44	43	42	41
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40

Grille-départ « B »

1	63	62	4	5	59	58	8	260
64	2	3	61	60	6	7	57	
16	15	14	13	12	11	10	9	
49	50	51	52	53	54	55	56	
17	18	19	20	21	22	23	24	
48	47	46	45	44	43	42	41	
32	31	30	29	28	27	26	25	
33	34	35	36	37	38	39	40	

1ère ligne

1	63	62	4	5	59	58	8	260
64	15	30	61	12	11	10	57	360
16	2	14	13	60	6	7	9	
49	50	51	52	53	54	55	56	
17	18	19	20	21	22	23	24	
48	47	46	45	44	43	42	41	
32	31	3	29	28	27	26	25	
33	34	35	36	37	38	39	40	

2ème ligne

1	63	62	4	5	59	58	8	260
64	15	30	61	12	11	10	57	260
16	50	46	29	28	27	39	25	260
49	2	51	52	53	54	55	56	
17	18	19	20	21	22	23	24	
48	47	14	45	44	43	42	41	
32	31	3	13	60	6	26	9	
33	34	35	36	37	38	7	40	

3ème ligne

1	63	62	4	5	59	58	8	260
64	15	30	61	12	11	10	57	260
16	50	46	29	28	27	39	25	260
49	2	19	36	21	54	23	56	260
17	18	51	20	53	22	55	24	
48	47	14	45	44	43	42	41	
32	31	3	13	60	6	26	9	
33	34	35	52	37	38	7	40	

4ème ligne

1	63	62	4	5	59	58	8	260
64	15	30	61	12	11	10	57	260
16	50	46	29	28	27	39	25	260
49	2	19	36	21	54	23	56	260
17	18	51	20	53	22	55	24	260
48	47	14	45	44	43	42	41	
32	31	3	13	60	6	26	9	
33	34	35	52	37	38	7	40	

5ème ligne

1	63	62	4	5	59	58	8	260
64	15	30	61	12	11	10	57	260
16	50	46	29	28	27	39	25	260
49	2	19	36	21	54	23	56	260
17	18	51	20	53	22	55	24	260
32	31	14	13	44	43	42	41	260
48	47	3	45	60	6	26	9	
33	34	35	52	37	38	7	40	

6ème ligne

	1	63	62	4	5	59	58	8	260
	64	15	30	61	12	11	10	57	260
	16	50	46	29	28	27	39	25	260
	49	2	19	36	21	54	23	56	260
	17	18	51	20	53	22	55	24	260
	32	31	14	13	44	43	42	41	260
	48	47	3	52	37	38	26	9	260
	33	34	35	45	60	6	7	40	260
180	260	260	260	260	26	260	26	260	260

7ème et 8ème lignes

On remarque que l'établissement de la magie dans la 5ème ligne ne nécessite aucune permutation dans les colonnes.

On obtient un carré-semi-magique normal, avec une seule diagonale principale magique, de constante magique $M_8 = 260$.

Il y a d'autres solutions, avec la même grille-départ.

Un dénombrement général . . .

n	Nombre théorique de solutions par la *Méthode des couples complémentaires*
4	8 ! = 40 320
6	18 ! = 6 402 373 705 728 000 (16 chiffres)
8	32 ! = 263 130 836 933 693 530 167 218 012 160 000 000 (36 chiffres)
10	50 ! = 30 414 093 201 713 378 043 612 608 166 064 768 844 377 641 568 960 512 000 000 000 000 (65 chiffres)

René Descombes - 4 Avril 2020